特殊相対性原理について

2022.12.25　　　　藤森弘章

要旨：特殊相対性理論の歴史を振返ってみると，ローレンツとポアンカレは，1887年のマイケルソン−モーリーの実験結果を数学的に証明しようとその途上にあった．一方で，アインシュタインは，1905年に相対性原理と光速度不変の原理に基づく[相対性]理論を発表した[1]．ポアンカレが1901年に著書『電気と光学』[2]に残した問題は「よくできた理論は，この[相対性]原理を非常に厳密に，しかも一挙に証明できるはずである」というものであった．

ところで，ユークリッド幾何学が平面の表と裏で，全く同様にかつ同時になりたつことをどう証明するか．この問いの中にこの問題の答がある．この論文では，特殊相対性原理を数学的に定義し，線型変換の不変関数を導くことによって，この問題に対する肯定的な答を得た．

1. 予備知識

1.1 用語

▪**時空**または**時空間**とは，宇宙の全ての物質を取去った，3次元の空間と1次元の時間からなる4次元の空間であり，ミンコフスキー空間とよばれる．数学では時空間を広い意味で単に空間ともよぶ．

▪**表裏対称平面**とは，裏面と表面の区別がつかない平面のことである．

▪時空間における表裏対称平面は，**空間×空間型**と**空間×時間型**の2種類がある．空間×空間型の平面は，空間軸が等方的であるので全等方的であり，ユークリッド平面とよばれる．空間×時間型の平面は, 時間軸が一方的で空間軸が等方的であるので半等方的であり, ミンコフスキー平面とよばれる．

1.2 特殊相対性原理

拡張キューリーの原理

キューリーの原理は「線型の物理現象では，原因の対称性は結果の中に見出される」というものである．この原理を拡張して「線型空間では，部分空間の対称性は全体空間の対称性に反映され，時空の座標変換も同様である」とした．つまり，少なくとも空間の等方性と時間の一方性という直線(部分空間)の対称性を用いて，全体空間の対称性や変換が説明されるべきである．

この観点から特殊相対論の論法を見直すと，ローレンツ変換を導く過程で，二つの重なる時間軸が同じ方向を持つ, という時間の一方性の条件は使われず, 他方で空間の等方性の条件は使われている．時間の一方性は，現象論に基づく二つの原理の背後に隠れてしまっている．光速度不変の原理が，相対性原理とマクスウェルの光速の法則に依存していると考えると，残りの独立の相対性原理は，十分条件ではあっても必要条件ではないはずである．これがポアンカレの心境なのかもしれない．

特殊相対性原理の定義

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$を線型変換，$\mathrm{f}(\boldsymbol{p})$ と $\mathrm{g}(\boldsymbol{q})$ を関数，$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を異なる右手座標系の点，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{Ap}$ がなりたつとし，定義により $\mathrm{f}(\boldsymbol{p})=\mathrm{f}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{q}):=\mathrm{g}(\boldsymbol{q})$ とする．もし$\mathrm{g}(\boldsymbol{q})=\mathrm{f}(\boldsymbol{q})$ であれば $\mathrm{f}(\boldsymbol{p})=\mathrm{f}(\boldsymbol{q})$ がなりたち，いずれの座標平面の世界にいるのか区別がつかない．これは異なる座標平面 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の上で不変関数 f がなりたつことを意味し，どのように法則 $\mathrm{f}(\boldsymbol{p})=\mathrm{f}(\boldsymbol{q})$ が生まれるかを示している．この仕組みを相対性原理とよぶ．相対性原理の数学的定義は，$\mathrm{f}(\boldsymbol{q})=\underline{\mathrm{f}(\boldsymbol{Ap})=\mathrm{f}(\boldsymbol{p})}$ かつ $\underline{\det\boldsymbol{A}>0}$ である．

エルランゲン・プログラムとよばれるクラインの思想「変換しても変わらない量や性質を研究するのが幾何学である」にキュリーの原理を考え合せると「**線型座標平面のもつ対称性は変換群Aに反映され，変換群Aのもつ対称性は不変関数 f に反映されて，それらが幾何学をつくる**」となる.

1.3 定理*

* これらの定理は拙著[6]または論文[7]に証明がある.

▪ 2×2 行列のもつ不変直線

行列$B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のもつ不変直線 $\mathrm{f}(\boldsymbol{p})$ は，方程式 $\mathrm{f}(B\boldsymbol{p}) \equiv \mathrm{f}(\boldsymbol{p}) = ux+vy$ を解いて得られる．即ち，行列Bが固有値 $\lambda=1$ をもつとき，次の不変直線 $\mathrm{f}(\boldsymbol{p})$ を得る.

$$\mathrm{f}(B\boldsymbol{p}) \ \equiv\ \mathrm{f}(\boldsymbol{p}) = cx-(a-1)y. \tag{1}$$

▪ 2×2 行列のもつ 2 次不変関数の恒等式

2×2 行列Aのもつ 2 次不変関数は，方程式 $\phi(A\boldsymbol{p}) \equiv \phi(\boldsymbol{p}) = ux^2+vy^2+wxy$ を解いて得られる．行列を$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 点を $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 2 次関数を $\phi(\boldsymbol{p})=-cx^2+by^2+(a-d)xy$ とするとき, 次の恒等式がなりたつ.

$$\phi(A\boldsymbol{p}) \equiv \det A \cdot \phi(\boldsymbol{p}). \tag{2}$$

$\det A\ =1$ のとき $\underline{\phi(A\boldsymbol{p}) = \phi(\boldsymbol{p})}$ がなりたち，変換Aは不変関数$\phi(\boldsymbol{p})$をもつという．これは相対性原理をみたし，対称性でキュリーの原理に従う.

▪ 2×2 特殊線型行列の極形式

特殊線型行列Sは**可換係数** k,h を用いて次のように分解される.

$$S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+hb & b \\ kb & m-hb \end{pmatrix},$$
$$\text{ここに } \det S = m^2-\varDelta b^2=1,\ \ \varDelta=h^2+k,\ m=(a+d)/2,\ k=c/b,\ 2h=(a-d)/b,\ b\neq 0. \tag{3}$$

共通の可換係数 k,h をもつ行列S_1, S_2は， $S_1S_2=S_2S_1$ がなりたち，積S_1S_2の可換係数も k,h となる．また行列Sはy^2の係数で正規化された 2 次不変関数をもち相対性原理をみたす.

$$\phi(S\boldsymbol{p}) \equiv \phi(\boldsymbol{p})=-kx^2+y^2+2hxy=r^2,\ \det S=1,\ \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ r\text{は半径}. \tag{4}$$

行列Sと不変関数$\phi(\boldsymbol{p})$は，判別式$\varDelta=h^2+k$ の正負により三つの型に分類される．$\varDelta<0$ のとき，それらは楕円型であり，$\varDelta>0$ のときそれらは双曲型であり，$\varDelta=0$ のときそれらは直線型である.

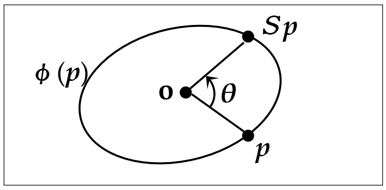
このようにして特殊線型行列S ($\det S=m^2-\varDelta b^2=1$) は可換係数 k,h と偏角θを用いて次の様に表現される．このとき恒等式$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ または $\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$, ただし $\theta=0$ のとき $S=E$ (恒等変換) の関係を用いている.

$$\varDelta<0 \text{ のとき，} S=S(\theta,k,h)=\begin{pmatrix} \cos\theta+\frac{h}{\sqrt{-\varDelta}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{-\varDelta}}\sin\theta \\ \frac{k}{\sqrt{-\varDelta}}\sin\theta & \cos\theta-\frac{h}{\sqrt{-\varDelta}}\sin\theta \end{pmatrix},\ \text{楕円型}. \tag{5}$$

$$\varDelta>0 \text{ のとき，} S=S(\theta,k,h)=\begin{pmatrix} \cosh\theta+\frac{h}{\sqrt{\varDelta}}\sinh\theta & \frac{1}{\sqrt{\varDelta}}\sinh\theta \\ \frac{k}{\sqrt{\varDelta}}\sinh\theta & \cosh\theta-\frac{h}{\sqrt{\varDelta}}\sinh\theta \end{pmatrix},\ \text{双曲型}. \tag{6}$$

$$\varDelta=0 \text{ のとき，} S=S(b,h)=\begin{pmatrix} m+hb & b \\ -h^2b & m-hb \end{pmatrix},\ \text{ここに } m=\pm 1,\ \text{直線型}. \tag{7}$$

特殊線型行列Sは加法定理　$S(\theta_1,k,h)\,S(\theta_2,k,h)=S(\theta_1+\theta_2,k,h)$　または $S(b_1,h)\,S(b_2,h)=S(b_1+b_2,h)$　がなりたつ.



いずれの 2×2 非対角正則行列Aも次の極形式で表わされる．偏角θは，式(4)の不変関数$\phi(Sp)\equiv\phi(p)$上で定義される交差角$\angle(p, Sp)$である．　(→図は$\phi(p)=r^2$が楕円のとき)

$$A=(\det A)^{1/2}\,S(\theta,k,h)\ \text{または}\ A=(\det A)^{1/2}\,S(b,h). \tag{8}$$

▪ 拡張速度合成定理

ローレンツ変換より，次の速度合成定理がなりたつ.

$$v_{13}=-v_{31}=(v_{12}+v_{23})/(1+v_{12}v_{23}/c^2).$$
$$\text{これを同値変形して:}\ (c-v_{12})(c-v_{23})(c-v_{31})=(c+v_{12})(c+v_{23})(c+v_{31}). \tag{9}$$
$$3\text{を}n\text{に拡張して:}\ (c-v_{12})(c-v_{23})\cdots(c-v_{n1})=(c+v_{12})(c+v_{23})\cdots(c+v_{n1}).$$

1.4 現象論と本質論と定義に基づく公理的方法

ユークリッド『幾何原本』の伝統から，現象論に基づく公理的方法が科学のお手本とされてきた．ガリレイ，ニュートン，アインシュタイン・・・らの著作･立論は，みなこの方法に倣っている．これに対して，本質論に基づく公理的方法と，定義に基づく公理的方法がある．線型空間におけるユークリッド内積の導入などは，定義に基づく公理的方法である.

- 現象論：基礎となる現象･真実 → **帰納** → 公理･公準･原理･仮説 → **演繹**→ 命題･定理･法則
- 本質論：対象自身の本質･構造 → **帰納** → 公理･仮説 → **演繹** → 命題･定理･法則
- 定義　：独立性と無矛盾性をみたす公理系の定義 → **演繹** → 命題･定理

平面幾何学の公理を例にとり，現象論と本質論に基づく公理的方法の違いを対比する.

ユークリッド幾何：現象論に基づく公理	本稿：平面の本質論に基づく公理
九つの共通公理(重なる物は等しいなど)	一様性に基づく線型空間と次元の定義
五つの幾何公準(半径で円が描けるなど)	平面の表裏対称と対称性の因果律の公理

科学の本領の一つは，何故そうなるかを解き明かすことにあるが，現象論の弱点は，出発となる現象からでしか答えられないことにある．その点本質論は，対象とする世界の構造やその物自身の有する対称性や因果関係から出発するので, 必要条件から数学的構造が厳密に表現･推論でき, 何故かに対する理解が本質にまで論理的につながり, また隠れている秩序や隣接科学との関連性が章かになることが強みである．ただ現象論は手っ取り早く立論ができ，早く先に進めるという利点がある．本稿は平面の本質論に基づく公理的方法を目指した.

2. 概要 Introduction

キュリーの原理より，すべてを 1 次元の空間と時間による 2 次元の時空間の模型で考える.

(1)右手斜交座標系を平面の両面に向き合うように張り，原点を合わせる．2x2 背面座標変換行列Bは裏返し(折返し)変換だから，$\det B<0$ である．背面座標変換Bを裏返して，右手座標系間を変換する変換Aを導く.

$$A=MB=(\det A)^{1/2}\,S(\theta,k,h),\ \text{ここに}\ M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \det A>0,\ \det S(\theta,k,h)=1. \tag{10}$$

可換係数 k,h は，第(6)項に示すように平面の対称性を規定し，平面幾何の基底をなす．

(2) det$\boldsymbol{A}$=1 でかつ変換 $\boldsymbol{S}$ が共通の可換係数 k,h をもつとき，変換 $\boldsymbol{S}$ は式(4)で与えられる 2 次不変関数 $\phi(\boldsymbol{p})$ に基づく可換変換群をつくり，ノルム $\|\boldsymbol{p}\|=r$ の等長変換群の表裏非対称平面幾何をつくる．

(3) 背面座標変換が $B\neq B^{-1}$ のとき，平面のどちら側かの区別がつく．従って**表裏対称平面方程式**は

$$B=B^{-1} \Leftrightarrow B^2=E,\ \text{ここに}\ \det B<0. \tag{11}$$

解として，自由度 2 の**斜鏡映変換行列** B を得る．

$$B=\begin{pmatrix}-a & -b\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a & -b\\ kb & a\end{pmatrix}, \det B=-a^2+kb^2=-1,\ k=c/b,\ \text{固有値}\ \lambda=\ \pm 1. \tag{12}$$

(4) 斜鏡映変換 B を裏返して，右手座標系間を変換する変換 F を導く．

$$F=MB=\begin{pmatrix}a & b\\ kb & a\end{pmatrix}=S(\theta,k,0),\ \text{ここに}\ M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \det F=1,\ k=c/b,\ h=0,$$
$$\text{固有値}\ \lambda=a\pm\sqrt{k}b,\ \text{固有直線}\ y=\pm\sqrt{k}x,\ k,h\ \text{は可換係数}. \tag{13}$$

行列 $F=S(\theta,k,0)$ を**特殊等対角変換**といい，k の正負によって次のように分類される．

$k<0$ のとき，F は楕円変換である．特に $k=-1$ のとき，F は回転変換である．

$k=0$ のとき，F はガリレイ変換である．

$k>0$ のとき，F はローレンツ変換である．

このように，時空間の平面の表裏対称性からこれらの変換が導かれる．式(4)と $h=0$ から，特殊等対角変換 F の 2 次不変関数 $\phi(\boldsymbol{p})$ が得られ，これは相対性原理をみたす(下線部)．

$$\underline{\phi(F\boldsymbol{p})\equiv\phi(\boldsymbol{p})}=-kx^2+y^2=r^2,\ \underline{\det F=1}. \tag{14}$$

(5) 時空間における平面の対称性は次の通りである．

a. [公理] 時空間の平面は，任意の原点において 2 次元の線型空間(ベクトル空間)の定義がなりたつ．この対称性には空間と時間の反転不変，空間と時間の平行移動不変が含まれる．

b. 表裏を有する線型平面に生ずる線型変換の積の可換性

c. [公理] 時空間の平面は表裏対称である．

平面の部分空間をなす直線に，重なる 2 本の数直線を張るとき，それらの座標変換の対称性は

$$x_2=rx_1 \Leftrightarrow x_1=r^{-1}x_2\ \text{より}\ r=r^{-1} \Leftrightarrow r^2=1 \Leftrightarrow r=\pm 1.$$

ゆえに $r=1$ のとき直線は一方的，$r=-1$ のとき直線は等方的(反転対称)である．

d. [公理] 空間は等方的である．

e. [公理] 時間は一方的である．

(6) 可換係数 k,h は，時空間における平面の対称性を規定する．

symt.	h	k	plane	transformation	created geometry
a	／	／	affine (one sided) plane	A general linear transf.	affine geometry
ab	h	k	front-back asymmetry	$S(\theta,k,h)$ special linear	asymmetry plane geom.
abc	0	k	front-back symmetry	$F=S(\theta,k,0)$ iso-diagonal	symmetry plane geometry
abcd	0	−	completely isotropic	$F=S(\theta,k,0)$ ellipse type	ellipse type plane geom.
abcd	0	-1	Euclidean plane	$R=S(\theta,-1,0)$ rotation	Euclidean geometry
abcde	0	0	Newtonian plane	$G=S(b,0)$ Galilean	Newtonian mechanics
abcde	0	+	Minkowski plane	$L=S(\theta,k,0)$ Lorentz	relativity principle

(7) 一直線上を相対定速度 v で移動する二つの慣性座標系は，ミンコフスキー平面の表裏の右手座標系に対応する．これを従来型として図 1 に，対称型として図 2 に示すが，どちらも同じ斜鏡映変換 B の例である．
(8) ミンコフスキー平面は，この平面の対称性がローレンツ変換によって表現され，ユークリッド幾何の定理と形式的に同じ定理をもつミンコフスキー平面幾何がなりたつことを意味する[6]．ユークリッド幾何の定理は，回転変換に対して共変であるから，ミンコフスキー平面幾何も式(14)の示すようにローレンツ変換に対して共変であるはずである．
(9) 相対性原理は，空間と時間の対称性を反映した線型変換の基本的な性質である．この原理は斜鏡映変換 B に属する二つの固有直線がつくる固有平面群の対称性より数学的に導かれる．

3. 相対性原理の証明

3.1 表裏対称平面

線型時空間の平面の表と裏は区別がつかない，という自然の中に隠れた平凡な秩序(真理)がある．二つの平面に異なる座標系を張ってその違いを区別することができるが，合同な座標系を張るときは区別できない．表裏対称平面の場合，表裏は合同な座標平面であり，かつ**背中合わせ**である．例えば透明平面に描かれた直角三角形についてピタゴラスの定理を記述するとき，表面になりたつ証明が，同時にそのまま裏面にもなりたち，表裏の区別がつかない．それは表裏に張る座標系の対称条件およびそれらの拘束条件を求めることに帰着する．

任意の右手斜交座標系を平面の両面に向き合うように張り，原点を合わせる．2x2 背面座標変換行列を B とすると $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ がなりたつ．変換 B は裏返し(折返し)変換だから，$\det B<0$ である．平面のどちらが裏か表かは区別できないので，表裏対称平面方程式は式(11)で与えられ，解の斜鏡映変換 B は式(12)で与えられる．両式を再掲する．　＊ 朱色は裏面を示す.

$$\text{表裏対称平面方程式}\quad B=B^{-1} \Leftrightarrow B^2=E,\ \text{ここに}\ \det B<0. \tag{11}$$

$$\text{解}\quad B=\begin{pmatrix} -a & -b \\ c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & -b \\ kb & a \end{pmatrix},\ \det B=-a^2+kb^2=-1,\ k=c/b,\ \text{固有値}\ \lambda=\pm 1. \tag{12}$$

変数 a,b,c の符号は任意に設定することができる．式(1)の設定とは異なることに注意.

解の斜鏡映変換 B は，次の性質をもつ．

- 斜鏡映変換 B の表裏の座標軸方程式が置換対称であるので, 表裏の座標系 x-y と u-v は合同である．

$$\begin{aligned} &\text{表面: } v\text{-axis: } u=-ax-by=0,\quad u\text{-axis: } v=kbx+ay=0, \\ &\text{裏面: } y\text{-axis: } x=-au-bv=0,\quad x\text{-axis: } y=kbu+av=0. \end{aligned} \tag{15}$$

- 変換 B は固有値 $\lambda=1$ をもつので，式(1)から B は**不変直線** $\mathrm{f}(\boldsymbol{p})$ をもつ．ただし $a\to-a$ と置く．

$$\mathrm{f}(B\boldsymbol{p}) \equiv \mathrm{f}(\boldsymbol{p}) = cx+(a+1)y. \tag{16}$$

- 固有値 $\lambda=1\Leftrightarrow$不動点方程式 $B\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$ において，この固有直線(部分空間)を**折返し線** f という．

$$cx+(a-1)y=0. \tag{17}$$

- 固有値 $\lambda=-1\Leftrightarrow$反転方程式 $B\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{p}$ において，この固有直線(部分空間)を**等方線** g という．

$$cx+(a+1)y=0. \tag{18}$$

この等方線 g は原点に対して等方的であり，また式(16)で与えられる不変直線 f($\boldsymbol{p}$)に平行である．点 $\boldsymbol{p}$ が不変直線 f($\boldsymbol{p}$)=s 上にあり, 不動点 $\boldsymbol{r}$ が折返し線 f と不変直線 f($\boldsymbol{p}$) の交点であるとき，折返し線 f 上では $B\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}$，不変直線上では f($B\boldsymbol{p}$)=f($\boldsymbol{p}$)=f($\boldsymbol{r}$) がなりたつ．ベクトル($\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}$)を等方線 g 上に平行移動させることにより次を得る．

$$B(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})=-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}) \Leftrightarrow B\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r} \Leftrightarrow B\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{r},\ \text{ここに}\ \mathrm{f}(B\boldsymbol{p})=\mathrm{f}(\boldsymbol{p})=\mathrm{f}(\boldsymbol{r}). \tag{19}$$

不動点(折返し点) $\boldsymbol{r}$ は点 $\boldsymbol{p}$ と $B\boldsymbol{p}$ の中点だから，不変直線 f($\boldsymbol{p}$)は不動点 $\boldsymbol{r}$ を中心に等方的である．

▪ 斜鏡映変換 B に属する二つの固有直線(部分空間)すなわち折返し線 f と等方線 g は，固有平面をつくる．固有直線 f,g および不変直線 f($\boldsymbol{p}$)は，それぞれが表裏同形の式でかつ表裏で重なる．二つの固有直線は図では一般に斜交するが，式(44)から数式では内積が 0 となり直交する(→図 1，図 2).

$$\text{内積}：-kx_1x_2+y_1y_2=-k(a-1)\cdot(a+1)+kb\cdot kb=-k(a^2-kb^2)+k=0.$$

▪ この固有平面を**斜鏡映平面**という．§3.2 で詳述するように，可換係数 k および h=0 の定まった表裏対称平面において，任意の原点を中心に方向の異なる折返し線 f が無数に存在する．不動点 $\boldsymbol{r}$ が点 $\boldsymbol{p}$ と $B\boldsymbol{p}$ の中点であるので，この斜鏡映平面は折返し線 f を斜鏡映軸線に，等方線 g および不変直線群 f($\boldsymbol{p}$)を反転線にして，反転対称(斜鏡映対称)であり半等方的である．故に，この平面の部分空間として折返し線 f は時間軸に，等方線 g は空間軸に相当するとしてもよい．式(15)から斜鏡映平面は表裏対称である(→図 2).　y 軸と v 軸のなす角を 0 に近づけたとき，両者は折返し線 f と重なり，このとき斜鏡映変換 B は，その対角化行列の鏡映変換 $M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ となる．

▪ 一つの自然現象を二つの座標系から同時に見るとき，両系の視座を右手系に揃える．表裏対称平面上の自然現象や法則を平面の表と裏から記述するとき，表裏の座標系の視座を正面右手系に揃える．そのため裏面$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$を鏡映変換 M で反転して，右手座標系間の変換 F を導く．

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow M\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=MB\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-u\\ v\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}x_\mathrm{F}\\ y_\mathrm{F}\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\\ \text{ここに}\ F=MB=\begin{pmatrix}a & b\\ kb & a\end{pmatrix}=S(\theta,k,0),\ M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \det F=1,\ k=c/b,\ 2h=(a-a)/b=0,\\ \text{固有値}\ \lambda=a\pm\sqrt{k}b,\ \text{固有直線}\ y=\pm\sqrt{k}x,\ \text{また}\ k,h\ \text{は式(3)の可換係数.}\end{gathered} \tag{20}$$

この変換 F を**特殊等対角変換**という．この変換 F は，裏面座標系の u 軸を鏡映変換 M で x 反転（$x_\mathrm{F}=-u$，$y_\mathrm{F}=v$）して，正面右手系 x_F-y_F となし，正面右手系 x-y と視座を揃えたものである．

▪ 特殊等対角変換 F には**恒等不変式**(14)がなりたち，不変関数 $\phi(\boldsymbol{p})$は相対性原理の定義をみたす．

$$\left[\phi\begin{pmatrix}x_\mathrm{F}\\ y_\mathrm{F}\end{pmatrix}=\right]\ \phi(F\boldsymbol{p})\equiv\phi(\boldsymbol{p})=-kx^2+y^2=r^2,\ \det F=1,\ \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}. \tag{14}$$

正面と背面は視座を示し，表面と裏面は平面の本体を示す．関数 $\phi(F\boldsymbol{p})$は裏面にある．不変関数 $\phi(\boldsymbol{p})$ は，$\begin{pmatrix}x_\mathrm{F}\\ y_\mathrm{F}\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ からも得られるので，変換 F の**唯一**の不変関数である．

▪ 図 1 は，ミンコフスキー平面の例 $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -4 & 5\end{pmatrix}=B^{-1},\ k=1,\ \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}-3\\ -3\end{pmatrix}$ を示す．

折返し線 f は、y 軸と v 軸の中線である．

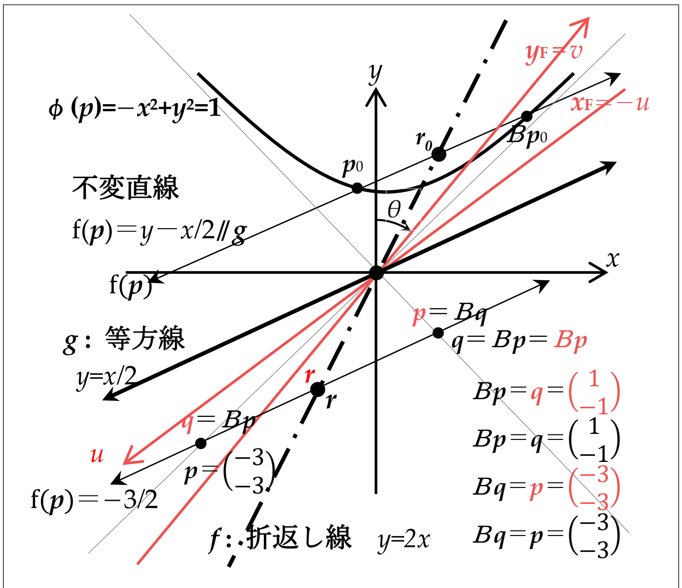


図 1 斜鏡映平

斜鏡映変換 B には 2 つの機能がある．

a. 図形反転変換: $p=\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$, $Bp=q=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 同一座表平面上で反転変換.

これは変換 B を図形の写像と解釈したものである．

b. 背面座標変換: $Bp=q=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 表面座標から裏面座標に変換.

$$p=Bq,\ p=Bq=\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix},\ r=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=(p+q)/2=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=r$$

特殊等対角行列 F の極形式

▪ 特殊線型行列 S の極形式（3）から，行列 $F(\theta,k)=S(\theta,k,h)$, $h=0$ の極形式を得る．
θ は座標系の y 軸と v 軸の内積がつくる偏角とよぶ交差角である[6].

$$k<0\ \text{のとき},\ F=\begin{pmatrix}a & b\\ kb & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta/\sqrt{-k}\\ -\sqrt{-k}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\ \theta\ \text{は楕円角である．} \tag{21}$$

この行列 F は楕円変換である．特に $k=-1$ のとき，θ は回転角，行列 F は回転変換，行列 B は鏡映変換であり，両者は直交変換である．

$$k>0\ \text{のとき},\ F=\begin{pmatrix}a & b\\ kb & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta/\sqrt{k}\\ \sqrt{k}\sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix},\ \theta\ \text{は双曲角である．} \tag{22}$$

この行列 F はローレンツ変換である．

$$k=0\ \text{のとき},\ F=\begin{pmatrix}a & b\\ kb & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix},\ a=\pm 1. \tag{23}$$

この行列 F はガリレイ変換である．

▪ 特殊等対角変換 $F(\theta,k)=S(\theta,k,0)$ は可換係数 k の符号に基づいて表裏対称平面の対称性を規定し，式(14)から次の様に可換特殊等対角変換連続群をつくる．$B=MF$，$\phi(Mp)=\phi(p)=-kx^2+y^2$ だから，斜鏡映変換 B と特殊等対角変換 F とそのべき乗 F^2，F^{-1} は次のように共通の不変関数 $\phi(p)$ をもつ．

$$\phi(Fp)\equiv\phi(p)=-kx^2+y^2 \text{ より } \phi(p)=\phi(Ep)=\phi(F(F^{-1}p))=\phi(F^{-1}p),$$
$$\phi(F^2p)=\phi(F(Fp))=\phi(Fp)=\phi(p),\ \ \phi(F_1F_2p)=\phi(F_1(F_2p))=\phi(F_2p)=\phi(p),\tag{24}$$
$$\phi(Bp)=\phi(M(Fp))=\phi(Fp)=\phi(p),\ \ \phi(BFp)=\phi(FBp)=\phi(p) \text{ ここに } M=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, p=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

平面の対称性を規定する可換係数 k を平面に固定したとき，行列 F と B は θ の 1 自由度を持ち，これらの積はいずれも共通の不変関数 $\phi(p)$ の軌道上で閉じている．例えば次のように．

$$\begin{aligned}&\phi(BF^2\dots B^{-1}F^{-1}p)=\phi(F^2\dots B^{-1}F^{-1}p)=\phi(F\dots B^{-1}F^{-1}p)\\&=\phi(B^{-1}F^{-1}p)=\phi(BF^{-1}p)=\phi(F^{-1}p)=\phi(p)=-kx^2+y^2=r^2.\end{aligned}\tag{25}$$

したがって，これらの変換 B と F は，2 次不変関数 $\phi(p)$ の上にノルム $\|p\|=r$ とする等長変換可換連続群をつくる．

▪ 斜鏡映変換（背面座標変換）B は，表面の点 p を裏面の対応する点 q に次のように変換する．

$$q_1=Bp_1,\ q_2=Bp_2.\tag{26}$$

表面側では，右手系の図形変換 X により，点 p_1 を p_2 に変換する．同様に裏面側では，図形変換 Y により，次のように点 q_1 を q_2 に変換する．

$$p_2=Xp_1,\ \det X>0,\ q_2=Yq_1,\ \det Y>0.\tag{27}$$

これら 4 つの式より次を得る．

$$q_2=Yq_1=\underline{YBp_1}=Bp_2=\underline{BXp_1}.\tag{28}$$

点 p_1 は任意であり，$B=B^{-1}$ であるので，次を得る．

$$YB=BX\ \Leftrightarrow Y=BXB\ \Leftrightarrow\ BY=XB,\ \text{ここに } \det Y=\det X>0,\ \mathrm{tr}\,Y=\mathrm{tr}X.\tag{29}$$

従って，行列 X と Y は相似である．式（29）の $YB=BX$ に $B=M$ と $B=MF$ をそれぞれ代入すると，

$$YM=MX,\qquad \underline{YM}F=MFX=\underline{MX}F.\tag{30}$$

第 2 辺と第 3 辺を比較すると，$FX=XF$，同様に $FY=YF$ がなりたつ．右手系座標変換 F と図形変換 X, Y は可換であり，同じ可換係数 $k,h=0$ をもつ．

$\det X=1$ のとき，変換 B, F, X, Y とそれらの任意の積は，以下のように平面の両側で共通の 2 次不変関数 $\phi(p)$ をもち，

$$\phi(Bp)=\phi(Fp)=\phi(Xp)=\phi(Yp)=\phi(p)=-kx^2+y^2=r^2\tag{31}$$

を軌道として，ノルム $\|p\|=r$ と定める等長変換可換連続群の幾何をつくる．

$$\|Bp\|=\|Fp\|=\|Xp\|=\|Yp\|=\|p\|=r.\tag{32}$$

3.2 k の符号の意味は何か．表裏対称平面の 3 つの型

平面に任意原点をおくとき，表裏対称座標平面の対称性は，可換係数 k および $h=0$ に表現され，同時に背面座標変換 B および不変関数 $\phi(p)$ に反映される．即ち対称性が違うそれぞれの平面に対して，一つの k の値と斜鏡映変換群 B と一つの不変関数 $\phi(p)$ とが対応し，一つの斜鏡映変換 B に対して，一

つの特殊等角変換Fと一つの偏角θと，そして一つの斜鏡映平面が対応する．斜鏡映平面は，その部分空間として表裏に重なる等方的な等方線gと，一方的な折返し線fをもち，半等方平面である．偏角θは，変換Bがつくるy軸とv軸の交差角である．偏角θが全実数をとるとき，斜鏡映平面を代表する等方線gと折返し線fの存在領域は，可換係数kの正または負に依存する．

(1) $k<0$のとき，Fは楕円型変換である。変換Bの極形式は式(21)から

$$B=MF=\begin{pmatrix}-a & -b\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta/\sqrt{-k}\\ -\sqrt{-k}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\ b=\frac{1}{\sqrt{-k}}\sin\theta,\ \ c=kb. \tag{33}$$

折返し線fと等方線gは式(17)，(18)より

$$\begin{gathered}\text{折返し線 } f: \mathrm{y}=\frac{-c}{a-1}x=\sqrt{-k}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}\,x=\sqrt{-k}\cot\frac{\theta}{2}\cdot x=lx,\\ \text{等方線 } g: y=\frac{-c}{a+1}x=\sqrt{-k}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\,x=\sqrt{-k}\tan\frac{\theta}{2}\cdot x=mx,\\ \text{両直線 } f,g \text{ の傾きは: } -\infty<l<\infty,\ -\infty<m<\infty.\end{gathered} \tag{34}$$

偏角θの半角は，折返し線fと等方線gの方位を決める．楕円角θが全実数をとるとき，折返し線fの存在領域は，原点を中心に全方位に分布し，折返し線f自身は反転対称すなわち等方的となる．従って，この表裏対称平面は空間×空間型の全等方平面と考えられる。この平面は拡張ユークリッド平面または楕円型平面とよび，楕円型平面幾何学がなりたつ．特に $k=-1$のとき，不変関数$\phi(\boldsymbol{p})=x^2+y^2$は円であり，この平面はユークリッド平面であり，ユークリッド幾何学がなりたつ．

(2) $k>0$のとき，変換Fはローレンツ変換である．変換Bの極形式は式(22)から

$$B=MF=\begin{pmatrix}-a & -b\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cosh\theta & -\sinh\theta/\sqrt{k}\\ \sqrt{k}\sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix},\ b=\frac{1}{\sqrt{k}}\sinh\theta,\ c=kb. \tag{35}$$

折返し線fと等方線gは式(17)，(18)から

$$\begin{gathered}\text{折返し線 } f: y=\frac{-c}{a-1}x=-\sqrt{k}\,\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta-1}\,x=-\sqrt{k}\coth\frac{\theta}{2}\cdot x=lx,\\ \text{等方線 } g: y=\frac{-c}{a+1}x=-\sqrt{k}\,\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta+1}\,x=-\sqrt{k}\tanh\frac{\theta}{2}\cdot x=mx.\end{gathered} \tag{36}$$

$$\text{漸近線}: y=\pm\sqrt{k}x. \tag{37}$$

偏角θの半角は，折返し線fと等方線gの方位を決める．それらの存在領域は：
折返し線fの傾きlは，両漸近線によって分割された上下の象限 $-\infty<l<-\sqrt{k}$ と $\sqrt{k}<l<\infty$ にあり，等方線gの傾きmは，左右の象限 $-\sqrt{k}<m<\sqrt{k}$ にある(→図1参照).
双曲角θが全実数をとるとき，斜鏡映平面を代表する折返し線fの存在領域は，上下の象限に偏在する．不変関数$\phi(\boldsymbol{p})$の上部の双曲線上の点$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}0\\ t_1\end{pmatrix}$, $t_1>0$は，折返し線f(折返し点$\boldsymbol{r}$) を挟んで同じ象限の双曲線上の点$B\boldsymbol{p}$に推移的に変換されて，$\phi(B\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{p})$，$\boldsymbol{p}+B\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{r}$がなりたち，点$\boldsymbol{p}$と点$B\boldsymbol{p}$と点$\boldsymbol{r}$の$y$座標は共に正(上向き)に揃う．さらに，表裏に重なる折返し線fは，ともに正向きの合同である．また，すべての等方線$\boldsymbol{p}-B\boldsymbol{p}$が折返し点$\boldsymbol{r}$に対して等方的であることから，この表裏対称平面は空間(等方線g)×時間(折返し線f) 型の半等方時空平面であると考えられる．この平面をミンコフスキー平面とよび，双曲型平面幾何，即ちミンコフスキー平面幾何がなりたつ．

(3) $k=0$のとき，Fはガリレイ変換である．変換Bの極形式は式(23)から

$$B=MF=\begin{pmatrix}-a & -b\\ 0 & a\end{pmatrix},\ a=\pm1,\ \det B=-1.$$
$$\text{折返し線 } f: x=-by/2\ (a=1\text{のとき}),\ \text{等方線 } g: y=0\ (x\text{-軸}),$$
$$\text{不変直線}: \mathrm{f}(Bp)=\mathrm{f}(p)=y,$$
$$\text{2次不変関数}: \phi(Bp)=\phi(Fp)=\phi(p)=y^2. \tag{38}$$

y=t（時間）と考えると，時間は不変関数$\phi(Fp)=\phi(p)=t^2$の不変量であり，ニュートンの絶対時間の考えと一致するので，この平面をニュートン平面とよぶ．この平面は半等方的であり，斜鏡映平面の空間軸（$y=0$）は表裏で共有される．

以上のことから，表裏対称平面は楕円型平面，ミンコフスキー(双曲型)平面，ニュートン平面の 3 種類である．これらの表裏対称平面は式(14)から相対性原理をみたし，その対称性でキュリーの原理に従う．即ち平面の表裏対称性は，特殊等対角変換Fおよびその不変関数である$\phi(p)$に反映される．よって，表裏対称平面になりたつ法則や定理の中に見出される平面の対称性は，自然法則が不変関数$\phi(p)$および不変量rを土台として造られるからと考えられる．(→4 章に続く)

3.3　二つの慣性座標系の対称的時空構造

一定の速度vで直線上を遠ざかる 2 つの慣性座標系 S1，S2 を考える．両系は対等である．二つの慣性座標系のそれぞれが空間 x 時間の右手系から他方を見るとき，速度および空間軸の正の向きが逆の関係にあるので，二つの系は半等方時空平面 (仮にミンコフスキー平面とする) の表裏の合同な座標系に相当する．両慣性座標系の原点を一致させる．図 2 では，S1 の座標軸x_1-t_1が表側，S2 の座標軸x_2-t_2が裏側にある．背面座標変換は，斜鏡映変換Bである．ミンコフスキー平面上では，特殊等対角変換Fはローレンツ変換 L (=MB)であり，表面座標系 S1 から，裏面座標系 S2 を裏返したローレンツ座標系 SL に，以下のように変換する．

$$\begin{pmatrix}x_2\\ t_2\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x_1\\ t_1\end{pmatrix}\Leftrightarrow M\begin{pmatrix}x_2\\ t_2\end{pmatrix}=MB\begin{pmatrix}x_1\\ t_1\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}-x_2\\ t_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_L\\ t_L\end{pmatrix}:=L\begin{pmatrix}x_1\\ t_1\end{pmatrix},\ \text{ここに}\ L=MB=\begin{pmatrix}a & b\\ kb & a\end{pmatrix}.$$
$$\text{ローレンツ変換の展開形は}\quad x_L=ax_1+bt_1,\ t_L=kbx_1+at_1,\ \text{ここに}\ k>0. \tag{39}$$

第1式より，aは単位を持たない定数，bは速度定数である．x_1-t_1座標系では，S2の運動は$x_1=vt_1$と表わされ，t_L軸の式は$x_L=ax_1+bt_1=0$なので，$v=x_1/t_1=-b/a$である．第2式において，kは速度の2乗の逆数であり，速度定数cを慣例により$k=1/c^2$とする。det L=1なので，$a=(1-v^2/c^2)^{-1/2}=\gamma\geqq1$が得られる．このように，2つの慣性座標系から速度$v$，ローレンツ変換$L$とその斜鏡映変換$B$の関係は，具体的な式（40）に求められる．

$$L=\gamma\begin{pmatrix}1 & -v\\ -v/c^2 & 1\end{pmatrix},\ B=\gamma\begin{pmatrix}-1 & v\\ -v/c^2 & 1\end{pmatrix}=ML,\ \det B=-1,\ L\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}-v\\ 1\end{pmatrix},$$
$$L^{-1}=\gamma\begin{pmatrix}1 & v\\ v/c^2 & 1\end{pmatrix},\ \gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2},\ k=1/c^2\ \text{は可換係数}. \tag{40}$$

図 2 は図 1 と同じ $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -4 & 5\end{pmatrix}$, k=c=1, v=4/5, γ=5/3 である．図 1 を折返し線fと等方線gを中心線として直交させて描くと図 2 を得る．但し y=t と読み替える． 折返し線f：$t=2x$，等方線g：$t=x/2$,

$$L\begin{pmatrix}v\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1/\gamma\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}\gamma v\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1\\ -v/c^2\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}v\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1/\gamma\end{pmatrix},\ \ f\!: B\begin{pmatrix}3\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 6\end{pmatrix},\ \ g\!: B\begin{pmatrix}6\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ -3\end{pmatrix},$$
$$x=ct:\ B\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3\\ 1/3\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\ 1/3\end{pmatrix},\ \phi(p)=-x^2+t^2=1.$$

直線上の任意の二つの慣性座標系は，図 2 のように対称形に描くことができる．

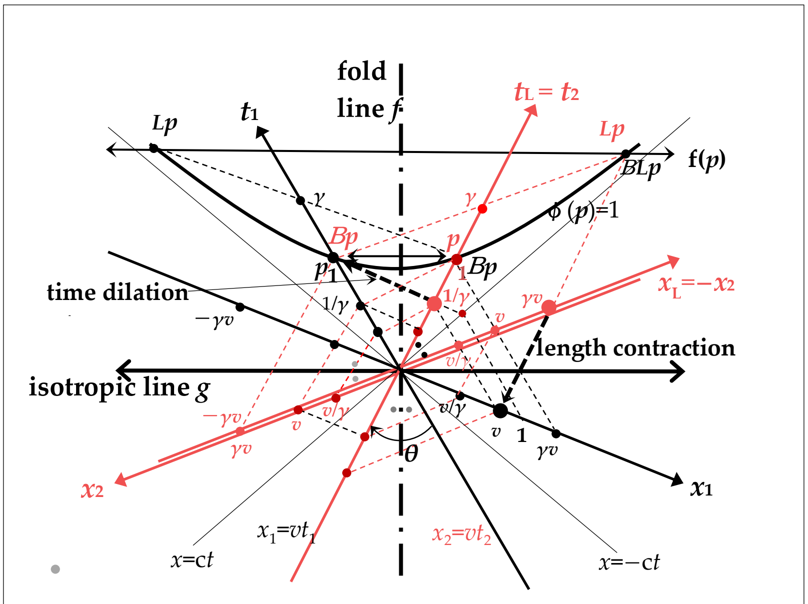


図 2 ミンコフスキー平面上の 2 つの慣性座標系

最高普遍速度 c

式（9）から，慣性座標系の限界速度が得られる（c は速度定数）．

$$(c-v_{12})(c-v_{23})\cdot\cdot\cdot(c-v_{n1})=(c+v_{12})(c+v_{23})\cdot\cdot\cdot(c+v_{n1}) \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow\ (c-v_{12})^2(c-v_{23})^2\cdot\cdot\cdot(c-v_{n1})^2=(c^2-v_{12}^2)(c^2-v_{23}^2)\cdot\cdot\cdot(c^2-v_{n1}^2)\geqq 0, \tag{41}$$

n は整数 $\Leftrightarrow c^2-v_{ij}^2\geqq 0 \Leftrightarrow (v_{ij}-c)(v_{ij}+c)\leqq 0$, ゆえに $-c\leqq v_{ij}\leqq c$.

ここに v_{ij} は慣性系 i から j をみた速度である．

慣性座標系のいかなる相対速度 v_{ij} も，普遍的な速度を意味する速度定数 c を超えることができない．マクスウェルの法則から，慣性系において光速は定数であり，また自然界の最高速度は真空中の光速である．時空平面において表裏対称性を保証する平面の可換係数（h=0, k=1/c²）の存在により，最高普遍速度定数 c は真空中の光速(最高速度)であり，従って時空平面はミンコフスキー平面でなければならない．これは，マクスウェルの光速の法則に相対性原理を適用したことと同じである．

4. 結論

表裏対称 $B=B^{-1}$, 背面座標変換 $Bp=q$, 図形反転変換 $Bq=p$ より $p=B^{-1}q=Bq=p$,
故に $f(p)=f(p)$. 表裏対称平面の表面でなりたつ事象 f は同様に裏面でもなりたつ． (42)

但し，表裏対称とは平面になりたつ自然法則が，表面と裏面で同様かつ同時になりたつことである．

ユークリッド幾何学の見直し

ユークリッド幾何学の場合，第七共通公理(重なり合うものは等しい)があり，透明平面上の図形から，表と裏は同じものであり，同じ幾何がなりたつことが当然とされた．地面の図形科学としての出自からか，表と裏の折返し(反転)の意義に気づかず，現象論として第三公準(円と半径)と第四公準(直角合同)を設けている．従って表裏で重なる固定線分(半径OR=r)の，点Oを中心とした全方位の折返しから表裏に円が描けることや，表裏で同じ定理がなりたつ過程までは証明していない．この現象論に基づく公理的方法は，より根本的な原因を見逃す危険がある．

自然法則や幾何定理のなりたち

平面上の一つの自然現象や法則を平面の表と裏から統一的に記述するとき，表裏対称により同様となる道筋を明示的に示せる筈である．法則や定理は表裏の立場を入替えても変わらない関係をみたすものであるが，変わらないものの**存在**が必要であり，それらは平面の**対称性**に由来するであろう．またキュリーの原理より，対称性は原因から結果へ，部分空間から全体空間へと反映される．このとき二つの立場は視座として**対等**でなければならない．また法則は慣習として**右手系**で記述される．

表裏対称平面に張る向き合う二つの合同な座標系 x-y と u-v の関係は，式(20)に示すように背面右手系 u-v を裏返して正面右手系 x_F-y_F とし，正面右手系 x-y と立場を対等にする．

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow M\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=MB\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{pmatrix}-u\\v\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}x_F\\y_F\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}},$$

$$\text{ここに } F=MB=\begin{pmatrix}a&b\\kb&a\end{pmatrix}=S(\theta,k,0),\ M=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \det F=1,\ k=c/b,\ 2h=(a-a)/b=0, \tag{20}$$

固有値 $\lambda=a\pm\sqrt{k}b$, 固有直線 $y=\pm\sqrt{k}x$, また k,h は式(3)の可換係数, Bは斜鏡映変換.

このとき特殊等対角変換Fに相対性原理(下線部)を表わす**恒等不変式**(14)がなりたつ．表面から裏面へと立場を替えるのが変換Fであり，変わらない関係が 2 次不変関数 $\phi(p)$と不変量 r である．

$$\left[\phi\begin{pmatrix}x_F\\y_F\end{pmatrix}=\right]\ \underline{\phi(Fp)\equiv\phi(p)}=-kx^2+y^2=r^2,\ \underline{\det F=1}. \tag{14}$$

時間の一方性と空間の等方性が表裏対称平面をつくり，表裏座標変換$B=B^{-1}$に反映される．このとき平面の表裏対称性を規定する可換係数 k, h=0 が定まる．この可換係数 k の正零負により，変換Bの対称性が特殊等対角変換$F=MB$ に反映され，さらに変換Fの対称性がFのもつ不変関数 $\phi(Fp)\equiv\phi(p)$ に反映される．時空平面になりたつ自然法則が平面の対称性に立脚するためには，自然法則が可換係数kを含む不変関数$\phi(p)=-kx^2+y^2=r^2$とその不変量rを土台として造られることが十分であり，法則が平面の対称性を担保するため特殊等対角変換F不変であることが必要である．

以上より，表裏対称平面になりたつ自然法則を含むすべての関係は，不変関数$\phi(p)$とその不変量 r を基礎として，それらを組み合わせた次の様な形式である．

$$\phi(F(p_1\pm p_2))=\phi(p_1\pm p_2)\ \text{ または }\ \phi\left(F\frac{d}{dr}p\right)=\phi\left(\frac{d}{dr}p\right). \tag{43}$$

これは即ち 2 次元空間における相対性原理の仕組み，およびエルランゲン・プログラムの思想に他ならない．このような，式(31), (32), (43)に基づいた変形の組合せを，ミンコフスキー平面やニュートン平面の物理法則や，ユークリッド平面やミンコフスキー平面の幾何定理に，見出すことができる．

例えば，表裏対称平面の内積は，$\phi(Fp)=\phi(p)=-kx^2+y^2=r^2=\|p\|^2$ から次のように導かれる[6].

$$\triangle Op_1p_2\text{において，}O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix},\ p_2=Ap_1\ \text{として}$$

$$\text{内積}\quad (p_1,p_2)=(\phi(Fp_1)+\phi(Fp_2)-\phi(F(p_1-p_2)))/2$$
$$=(\phi(p_1)+\phi(p_2)-\phi(p_1-p_2))/2=-kx_1x_2+y_1y_2.$$

式(8)から可換係数k,h=0をもつ表裏対称平面上の図形変換Aは (44)

$p_2=Ap_1=(\det A)^{1/2}S(\theta,k,0)\,p_1=(\det A)^{1/2}F(\theta,k)\,p_1$ と表わされる．これを右辺に代入して

$(p_1,p_2)=\|p_1\|\ \|p_2\|\cosh\theta$ (k>0, ミンコフスキー平面のとき),

または $(p_1,p_2)=\|p_1\|\ \|p_2\|\cos\theta$ (k<0, ユークリッド平面のとき) がなりたつ．

さらに，直角三角形 Op_1p_2 において(p_1,p_2)=0 (直交) のときピタゴラスの定理は，式(44), (32)から

$$\| F\boldsymbol{p}_1 \|^2 + \| F\boldsymbol{p}_2 \|^2 = \| \boldsymbol{p}_1 \|^2 + \| \boldsymbol{p}_2 \|^2 = \| \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 \|^2$$

がなりたち，式は裏と表の座標平面で同形である．

この論文は，次のことを論証している[2][3].
平面の線型構造を基礎として，
空間×空間型平面（ユークリッド平面）の表裏対称性から，鏡映変換群と回転変換群がなりたち，ユークリッド幾何学を形成する．
また，空間×絶対時間型平面（ニュートン平面）の表裏対称性から，斜鏡映変換群とガリレイ変換群がなりたち，ニュートン力学を形成する．
さらに，空間×時間型平面（ミンコフスキー平面）の表裏対称性から，斜鏡映変換群とローレンツ変換群がなりたち，相対性原理を形成する．そこから，ミンコフスキー平面幾何学と特殊相対性理論が成立する．

謝辞

本論文の作成にあたり，鋭いそして哲学的な助言をいただいた Gregorie Dupuis-Mc Donald 博士に感謝の意を表します．

参照文献

[1] A. Einstein “On the electrodynamics of moving bodies” 1905
[2] H. Poincarè “Electricitè et optique” 1901
[3] H. Poincarè “Science and Hypothesis” 1902 “The reason why true proof produces various results is that the conclusion is in a sense more general than the premise.”
[4] Hiroaki Fujimori, web site　http://www.spatim.sakura.ne.jp/
[5] Hiroaki Fujimori, YouTube “Relativity Arises from the Symmetry of Spacetime” https://www.youtube.com/watch?v=FQVuoYeu9i0
[6] Hiroaki Fujimori “表裏対称平面の幾何 Geometry of Symmetry plane” Bun-shin Press 2022
[7] Hiroaki Fujimori “Symmetry plane causes relativity and rotation” 2021 http://www.spatim.sakura.ne.jp/pdfpp/sym_pln.pdf/

* 本稿は，Minkowski Institute Press より出版された論文集『Spacetime Conference 2022』に載った拙稿「On the special principle of relativity」の訳文である．