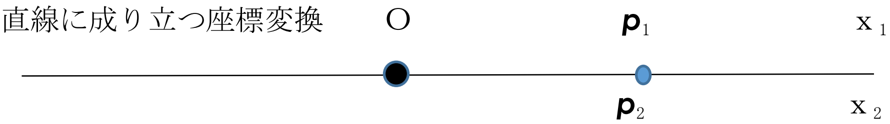
日本数学協会年次大会
２０１６年９月

平面の対称性に基づく長さの定義と成り立つ幾何学

藤森　弘章

線型代数学の本に，ベクトルの長さが“定義”として　$(x^2+y^2)^{1/2}$　と与えられるのに唐突さを感じるのは私だけだろうか．しかもピタゴラスの定理との関係も定かではない．

１　等方性をもつ直線に成り立つ座標変換



直線（一次元線型空間）に二つの座標系をとり，両原点を一致させると，それらの変換は

$x_2 = r_{12}x_1$，　$x_1 = r_{21}x_2 = r_{21}r_{12}x_1$，　　　よって　$r_{21}r_{12} = 1$

が成り立つ. 実数 r_{21} と r_{12} は逆数の関係にあり, 一般に　$r_{21} \neq r_{12}$　であるので両座標系上には，単位長さ（と向き）の異なる幾何学が成り立つが，定理・法則は同等である．$r_{21} = r_{12} = -1$ のとき両変換は等しいので，変換に区別がつかず，両座標系は対等である．二つの座標系の変換が対等なとき，直線は等方性をもつ，または等方的という．

３次元空間内の直線は等方的であり，時間を表わす直線は非等方的（一方的）で方向を有する．

２　２次元線型空間に成り立つ恒等式　（ピタゴラスの定理の一般線型平面への拡張）

行列　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，　点 $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，　関数　$f(\boldsymbol{p}) = -cx^2 + by^2 + (a-d)xy$　において

恒等式　$f(A\boldsymbol{p}) \equiv |A|\, f(\boldsymbol{p})$　が成り立つ．とくに　$|A| = ad - bc = 1$　のとき

$f(A\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{p})$　が成り立つので，行列Ａは不変関数 $f(\boldsymbol{p})$ をもつ．

３　表裏対称平面に成り立つ座標変換

２次元線型空間（平面）に，次の対称性を導入する．平面を表わす２次元座標系の少なくとも１軸（x 軸とする）が等方的であるとき，平面は他の１軸を対称軸として表裏無区別（表裏対等あるいは表裏対称あるいは x 方向対称）である．

表面と裏面を区別する数学的方法を考える．表面に任意の右手座標系１をとり，裏面に裏面から見て右手座標系２をとる．両系の原点を移動して一致させる．平面上の任意の一点Ｐを，表面座標系１に対して $\boldsymbol{p}_1$ ，裏面座標系２に対して $\boldsymbol{p}_2$ とする．$\boldsymbol{p}_1$ から $\boldsymbol{p}_2$ への座標変換　X_{12}　は唯一つ定まり

$\boldsymbol{p}_2 = X_{12}\boldsymbol{p}_1$，　$|X_{12}| < 0$　（右手系 $\boldsymbol{p}_1$ から，表面から見て左手系 $\boldsymbol{p}_2$ への変換となるので）

が成り立つ．　同様に $\boldsymbol{p}_2$ から $\boldsymbol{p}_1$ への座標変換 X_{21} は

$\boldsymbol{p}_1 = X_{21}\boldsymbol{p}_2 = X_{21}X_{12}\boldsymbol{p}_1$，（←$\boldsymbol{p}_2$ を代入），ゆえに　$X_{21}X_{12} = E$（恒等変換），　$|X_{21}| < 0$

が成り立つ．X_{21}，X_{12} は逆行列の関係にあり，表面裏面は一般に対応する点の変換行列により区別できる．従って表裏は同じ線型平面であっても一般に対等ではなく，例えば表面は右手系，裏面は左手系のような区別がある．これは座標系の取り方に自由度があることによる．これより平面の表面と裏面が区別できない表裏対等（表裏対称）の座標変換の条件は，直線の場合を参考にして

$X_{21} = X_{12} = X$，　$X^2 = E$，　$|X| < 0$

をみたす変換 X が存在することである．これを解いて，　対角和＝0，行列式＝－1　の行列

$$X=\begin{pmatrix}-a & -b\\ c & a\end{pmatrix},\quad |X|=-a^2+bc=-1$$

を得る．これは線対称変換行列または斜対称変換行列である．

４　表裏対等平面の不変量

裏面座標系２のｘ軸を反転した座標系２’をとり，座標変換１→２’をA_{12}(＝A，Aは右手系→右手系の変換)とすると

$\boldsymbol{p}_2=X_{12}\boldsymbol{p}_1$　より両辺にｘ方向反転行列　$M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$を掛けて

$M\boldsymbol{p}_2=MX_{12}\boldsymbol{p}_1=A\boldsymbol{p}_1$，$|A|>0$　　が成り立つから

$A=MX_{12}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ kb & a\end{pmatrix}$，$|A|=1$，$k=c/b$．$A$を可換特殊等方変換という．

が成り立つ．$|A|=1$　だから，変換行列Aは不変関数　$f(\boldsymbol{p})=-kx^2+y^2$　をもつ．ｋを共通の値としてもつ変換行列群Aは，互いに可換であり，また共通の普遍関数をもつので,一つの可換特殊等方変換群をつくる．この不変関数からベクトル$\boldsymbol{p}$の不変量　$f(\boldsymbol{p})=s^2$　を定義し，$(s^2)^{1/2}$で長さ(ノルム)を導き,ノルムから角度や内積を導く．$f(A\boldsymbol{p})=f(\boldsymbol{p})$は等長変換でもある．かくて平面の対称性に基づいて構築される一群の等長変換の平面幾何学が構築される．

５　表裏対称平面の分類と成り立つ幾何学

以下の項，詳しくはウェブサイト　http://spatim.sakura.ne.jp　の第２章を参照のこと．

表裏対称平面をｋの正負により分類することができる．(不変関数があり長さの定義ができるもの)

k	x軸	y軸	平面の対称性	平面の名称	変換A	(長さ)^2	成り立つ幾何学
k>0	等方	一方	半等方	ミンコフスキー平面	ローレンツ変換	$-kx^2+y^2$	時空平面幾何学
k=0	等方	一方	半等方	ニュートン平面	ガリレイ変換	y^2	ニュートン力学
k<0	等方	等方	両等方	ユークリッド平面	ユークリッド変換	$-kx^2+y^2$	ユークリッド幾何学
k=-1	等方	等方	全等方	ユークリッド平面	回転変換(xy 対称)	x^2+y^2	初等ユークリッド幾何学

(一般線型平面の場合)　$|A|=1$，$a\neq d$.

－	一方	一方	非対称	特殊線型平面	可換特殊線型変換	$-cx^2+by^2+(a-d)xy$	特殊線型変換幾何

参考例　　九点円の定理：三角形ABCの重心Gと垂心Hと外心Oと九点円の中心Kが一直線上に並ぶ