日本数学協会年次大会
２０１４年９月

題名「平面の対称性とユークリッド幾何学の拡張」

氏名　藤森 弘章

数直線(1 次空間)の対称性は，等方と非等方(一方)の別がある．平面の対称性を，x 軸は等方，y 軸は等方または一方とすると, ユークリッド幾何学を拡張した等方平面幾何学が成り立つ．

			等方平面幾何学
x 軸等方	y 軸等方	全等方平面(ユークリッド平面)	ユークリッド幾何学
x 軸等方	y 軸一方	半等方平面(時空平面)	時空幾何学

ユークリッドの『幾何原本』を次のように拡張する． I は第 I 巻を示す．

定義 I -8　平面角*1とは平面上で交わり，同一直線上にはない二つの線の間の傾きのことである．

拡張　平面偏角*1 とは，座標平面上の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ の 2 次行列Aによる線型変換　$\boldsymbol{q}=A\boldsymbol{p}$　で定義される偏角∠$\boldsymbol{pq}$ のことをいう．

*1 角をすべて偏角の用語に拡張する．平面の対称性により行列Aの型が定まる．

定義 I -15　円とは周と呼ばれる一つの線の境界で囲まれた平面図形であって，その中にある一つの点から円周上の点に引かれた直線の長さがすべて等しいものである．

拡張　円*2 とは，点 $\boldsymbol{p}_0$ を通る２次曲線　$\phi(\boldsymbol{p})=-kx^2+y^2=\phi(\boldsymbol{p}_0)$　のことで，その曲線は円周とよばれる．中心から円周の点 $\boldsymbol{p}_0$ にひいた直線を半径とよび，それらはみな等しい長さ $\phi(\boldsymbol{p}_0)^{1/2}$ である..

*2 円の用語を円(k=−1)，楕円(k<0)，双曲線(k>0)を含む２次曲線 $\phi(\boldsymbol{p})$に拡張する．

定義 I -24(追加)　二つのベクトル(または線分)が合同(または等長)とは，ベクトルの長さが等しいことである．ベクトルの長さとはベクトルを円の半径としたとき，その半径のことである．

定義 I -25(追加)　二つの三角形が合同とは, 対応する三つの辺の長さと三つの偏角がそれぞれ等しいことである．

以上の前提より例として２つの問題を解き，等方平面幾何学の一端を示す．

問題 1　ユークリッド平面と時空平面において正弦定理を導け．

解　【三角形 ABC の対応する辺のベクトルを BC=$\boldsymbol{a}$, CA=$\boldsymbol{b}$, AB=$\boldsymbol{c}$, $\|\boldsymbol{a}\|$=a, $\|\boldsymbol{b}\|$=b, $\|\boldsymbol{c}\|$=c とすると，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$ である．隣合う辺の外積において

$\underline{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}=(-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}\underline{=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}$ (同様に) $\underline{=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}$

(1)ユークリッド平面の外積の定義より　ab sinC=bc sinA=ca sinB

abc で除して逆数をとると　a／sinA=b／sinB=c／sinC=2r　　正弦定理

(2)時空平面でも同様に　a／sinhA=b／sinhB=c／sinhC=2r／i　　双曲正弦定理

ここに　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ のとき c=2r，2r は三角形 ABC の外接円の直径，を用いた．】

問題 2　次の定理をユークリッド平面と時空平面において証明せよ．

(1)重心定理 : 三角形 ABC の各辺 BC,CA,AB の中点を順に D,E,F とする．三中線 AD,BE,CF は一点 G(重心)で会する．

(2)垂線定理:三角形 ABC の各頂点から対辺に下ろした垂線の足を順に L,M,N とする．三垂線 AL,BM,CN は一点 H(垂心)で会する．

(3)オイラー線定理：三角形 ABC の外心 O，重心 G，垂心 H は一直線上にある．

(4)九点円定理：垂心 H と三頂点を結ぶ線分 AH,BH,CH の中点を P,Q,R とすれば，九点 D,E,F, L,M,N, P,Q,R は同一円周上にある．

証明【外心 O より頂点 A,B,C までのベクトルをそれぞれ OA=$\boldsymbol{a}$,OB=$\boldsymbol{b}$, OC=$\boldsymbol{c}$ とする．同様にベクトル OG= $\boldsymbol{g}$, OH=$\boldsymbol{h}$, OK= $\boldsymbol{k}$... (以下同様)と定める．

(1) OD= $\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/2$，AD=OD−OA=$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/2-\boldsymbol{a}$,

△EDG∽△BAG より　ED／BA=EG／BG=DG／AG=1／2,

よって $\boldsymbol{g}$=OA+AG=OA+AD×2／3= $\boldsymbol{a}+\{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/2-\boldsymbol{a}\}\times 2/3=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/3$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は対称だから一点 $\boldsymbol{g}$ が重心である．

(2)AH⊥BC より　$(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

BH⊥CA より　$(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$，$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$

両式を加えて　$(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$　よって　CH⊥AB

(3) △OBC は二等辺三角形だから OD⊥BC．直線 BO と外接円の交点を S とすると BS は直径，直角△CSB において中点連結定理より OD//SC⊥BC，OD=SC／2，AH⊥BC，よって AH//SC，また直角△ABS だから SA⊥AB，および CH⊥AB　より　CH//SA，よって　四辺形 AHCS は平行四辺形である．

AH=SC=2OD=2 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，垂心　$\boldsymbol{h}$ =OA+ AH= $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

重心　OG=$\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/3$　∴　OH=$\boldsymbol{h}=3\boldsymbol{g}$　が成り立ち，OGH は一直線上．

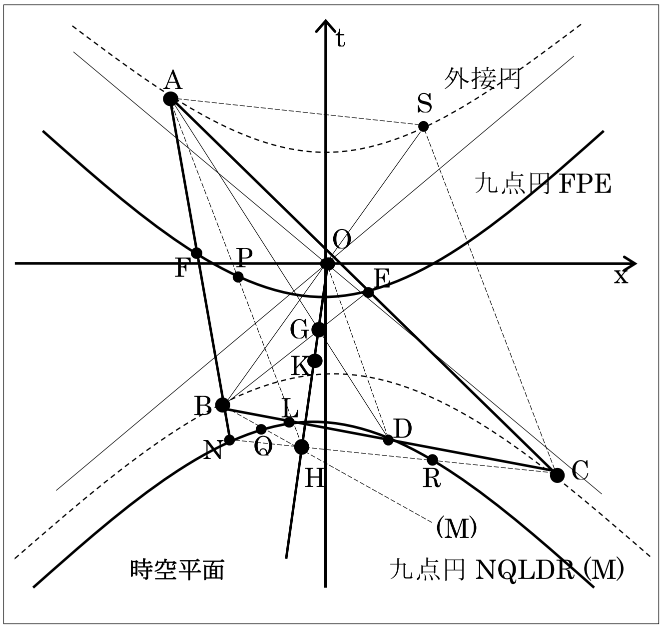
(4) $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{h}/2$ とする．KD= $\boldsymbol{d}-\boldsymbol{k}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/2-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/2=-\boldsymbol{a}/2$

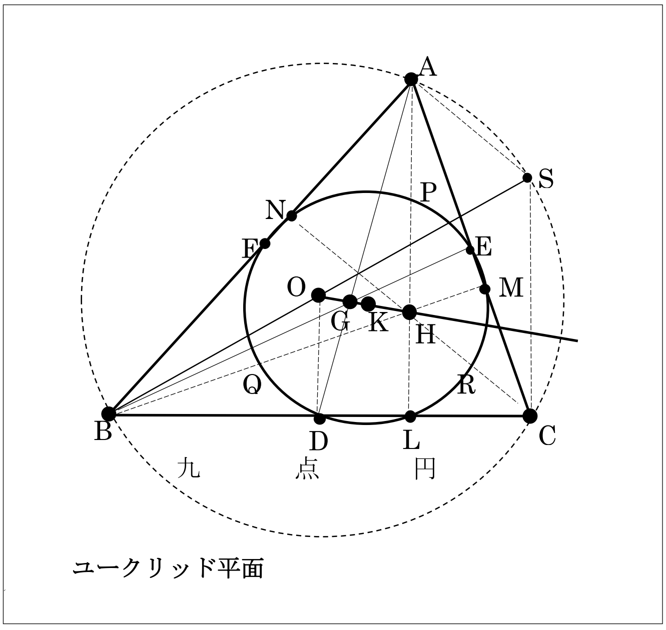
点 P は垂心 H と頂点 A の中点だから　$\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{a})/2$，KP=$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}/2$

同様に KE=$-\boldsymbol{b}/2$, KF=$-\boldsymbol{c}/2$, KQ=$\boldsymbol{b}/2$, KR=$\boldsymbol{c}/2$ が定まる．

よって，D と P，E と Q，F と R は K に対して対称である．

$\|\boldsymbol{a}\|^2=\|\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{c}\|^2$，また垂線の足 L は直径 DP をみる円周角だから，直角三角形 DPL において KD=KL=KP.　同様に KE=KM=KQ，KF=KN=KR　よって九点は K を中心とし半径 $\|\boldsymbol{a}\|/2$ の円周上にある．　以上は時空平面とユークリッド平面において同様に成り立つ．　】





詳しくは　http://spatim.sakura.ne.jp　の第２章を参照