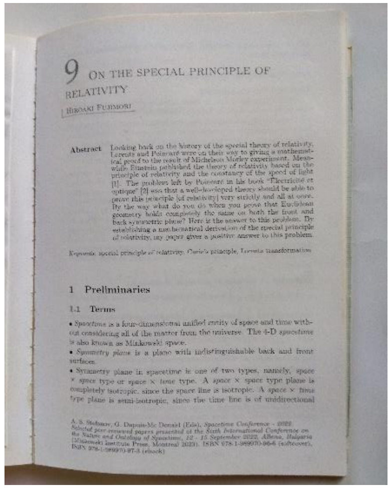
時空間の対称性が 自然法則をつくる

第 6 回 国際時空学会論文集



論文 On the special principle of relativity

2022 年 9 月 14 日 黒海の浜辺にて (前列左 2 筆者)

『表裏対称平面の幾何』

まえおき

皆さん，初めまして．これから「時空間の対称性が，自然法則をつくる」ということについてお話したいと思います．私は元来好奇心が強く，幼いころから「空はなぜ青いか」とか「氷はなぜ張るのか」などと質問を連発しては，親を困らせていました．仕事を辞めてから時間ができましたので，昔学校で教えてはくれなかったことについて考えてみようと，軽く思い立ちました．

それは例えば，三角形の合同定理はどう証明するのかとか，光の速さはなぜ一定で変わらないのか，などということです．毎朝目が覚めると寝床の中で寝ぼけながら，あーでもないこーでもないと，下手な考えを巡らせているうちに，ふとよい考えが浮かぶとあわてて飛び起きて，ノートを取るのが日課となりました．お陰で朝飯抜きの習慣となりました．

十年余り考えたことを論文「On the special principle of relativity」にまとめ，国内国外の学会に提出しました所、国内の三つの学会では門前払いを喰らいましたが，幸いにも国際時空学会で取り上げてくれまして，2022 年 9 月にヨーロッパで開かれた第 6 回総会で発表してきました．それが出版された論文集にも載りました．論分の結論は，「時空間の対称性が，自然法則をつくる」というものです．時空間の対称性とは，時間が一方的なこと，空間が等方的なこと，それに古今東西注目されなかったことですが，平面の表と裏は区別できない，ということです．自然法則とは，数学ではユークリッド幾何学の定理と，物理ではニュートン力学の法則と，それにアインシュタインの特殊相対性理論のことです．ピタゴラスの定理や相対性原理や光速不変の原理がなぜなりたつかといえば，それは時空間が対称的にできているから，というのがその答です．

興味のある人は，拙著「表裏対称平面の幾何」をご覧ください．それでは論文の解説を始めましょう．

[原論文] 特殊相対性原理について

[論文解説]　2024.4.24　**藤森弘章**

§はじめに

理科展の思い出

小学校のころ毎年 11 月になると，理科展という全校行事がありました．皆一斉にその年の理科の自主研究を模造紙に書いて，廊下や階段に張出しました．みんなの作品を見て回り，上級生の金賞の作品には目を見張りました．毎回かなり苦戦しましたが，教科書に載っていた電話機の断面図を見て手作りした受話器と送話器の工作で，一度だけ銀賞を頂きました．

古代より時間と空間のことは，哲学，幾何，天文および物理の分野で研究主題となっており，夥しい数の思索と文献と観測と実験の遺産があります．

1901 年ポアンカレは著書『Electricite et optique』で，**「よくできた理論は，きわめて厳密に一挙にこの原理を証明できる筈である」**と述べました．この原理とは絶対運動を否定する相対性原理のことです．1911 年東北大学教授の林鶴一は著書『初等幾何学の体裁』で「幾何学の基礎を確固たらしむる空間の公理には、曖昧な所が残されている」と述べました．

仕事を退いてから自由気ままという特権を手にしましたので，疑問の残る時間と空間について考えてみようと，思い立ちました．

さて，家紋の海老丸は正面からは左回りに，背面からは右回りに見えます．同じものでも視座が違えば異なって見えます．ところでユークリッド幾何学は，平面の表と裏で**全く同様にかつ同時**になりたちますが，これをどう証明しますか．この問いの中に先達の問題提起を解く鍵を見つけました．

本日は人生最後の理科展であります．

前提知識と付帯情報

▪ 必要な前提知識は，線型代数の基礎，群の定義，高校物理，相対論の初歩です．凡そ理系大学初年度の水準ですが，行列は 2×2 の正方行列しか扱わないので，勘のよい高校生も理解可能です．

▪ 本稿は，出版された国際時空学会論文集『Spacetime Conference-2022』
https://www.amazon.com/Spacetime-Conference-2022-Anguel-Stefanov-ebook/dp/B0BYTH5H9M/ref=sr_1_1?crid=2DTGAC1UKWLQU&dib=eyJ2IjoiMSJ9.6dLstL6BUiIzYWcIGa__IWBBLVwVkWOC9p72I4z6540.VUG4D4ObbOIu5EFaouPVhlzQaE1dvO96m9V9_PDQyGM&dib_tag=se&keywords=Spacetime+Conference-2022&qid=1709888771&s=books&sprefix=spacetime+conference-2022%2Cstripbooks-intl-ship%2C338&sr=1-1
に載った拙稿「On the special principle of relativity」に若干手を加えたものの解説であります．式の番号は式(20)を除き原論文に準拠します．本論文の

邦訳→ http://spatim.sakura.ne.jp/pdfpp/relativity_sj.pdf

が，弊 web site にあります．

▪ 本資料(pdf19 ページ)を A4 横で印刷して,手元に置くと便利です．

→http://spatim.sakura.ne.jp/pdfpp/kaisetu.pdf

▪ 弊 web site　「表裏対称平面の幾何」　→ http://www.spatim.sakura.ne.jp/

▪ 弊 web site に懸賞問題が掲げてありますので，先着正解者 20 名様に拙著を贈呈します．2×2 特殊線型行列の極形式を学習すれば，解ける問題です．

→ http://www.spatim.sakura.ne.jp/pdfpp/kensyo.pdf

(1) $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$A^{-\frac{100}{3}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ を求む．　→　答(1) x_1,y_1

(2) $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{3} & 2\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$，$A^{134^{1}/_{4}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ を求む．→　答(2) x_2,y_2

▪ 拙著『表裏対称平面の幾何』ぶんしん出版 101 頁 2 色刷り 1000 円

→ https://www.amazon.co.jp>表裏対称平面の幾何

Amazon または街の本屋さんで発注できます．

■学校に積み残した疑問

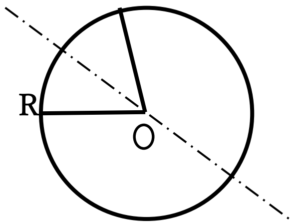
大学の入学式で覚えていますが，ときの大浜信泉総長が祝辞で

諸君は昨日迄 what を学んできたが，明日からは why を学ぶことになる．

と大見得を切って大変喜ばせてくれましたが，来る日も来る日も what と how ばかりでした．せめて自分で why を考えようともがいているうちに，天下り式に駆け足で進む授業に遅れてしまい，単位を取るのが大変でした．その一端を紹介します．

(1)ユークリッド幾何への疑問

平面幾何の公準は，何故平面そのものがもつ性質や対称性から出発しないのか？　平面の均質性・等方性や折返しによる重なりは，容易に気が付く．表裏が対称でくっついていることが，公準にどう反映されているのか．例えば，平面の表裏で重なる線分 OR を，点 O を中心に全方向で折返せば，中心 O 半径 OR の円ができる．第 7 共通公理*で，重なるものは等しいので，第 3 と第 4 公準*は不用となる．より基礎的な土台から，より深い理解が得られる筈である．



*注　ユークリッド幾何の公理
第 7 共通公理　互いに重なり合うものは等しい
第 3 公準　任意の点を中心として任意の半径の円を描くこと
第 4 公準　すべての直角は互いに等しいこと

(2)線型代数への疑問

線型空間におけるユークリッド平面の導入は，教科書によると内積の定義に依る．

内積の定義　$(a,b)=a_1b_1+a_2b_2$

シュワルツの不等式 $f=(a,b)/\|a\|\|b\|, -1\leq f\leq 1$ より $f=\cos\theta$

と角 θ を導いているが，θ は平面内の量として，図形と関連して定義されるべきである．

平面の対称性が幾何の定理を生むと考えれば，内積の定義は

平面の対称性 → 対称性のもつ不変量 → 不変量から導かれる内積

のように，その依って来たる由縁を示すべきである．どの線型代数の教科書も，この点において，自然科学の一部であるユークリッド幾何学の大地から，浮いているように見える．

(3)特殊相対論の論法への疑問

ローレンツ変換の導出で，必要条件として空間の等方性が使われているが，時間の一方性は使われていない．両者ともローレンツ変換を導くために必要な時空間の対称性を規定する条件であるが，二大原理が十分条件となってしまい，時間の一方性の条件が埋没している．相対論の論法に飛躍がある筈である．

これらのことは，恰も戦前の旧制中学の悪ガキのように，先生にとことん食い下がり，腑に落ちるまでは納得しない，という頑固さが必要でした．

§1 予備知識

§1-1 用語と定義

▪時空または時空間は，宇宙の全ての物質を取去った，3次元の空間と1次元の時間からなる4次元の空間であり，ミンコフスキー空間とよばれる．数学では時空間を広い意味で単に空間ともよぶ．

▪表裏対称平面とは，裏面と表面の区別がつかない平面のことである．

▪時空間における表裏対称平面は，空間×空間型と空間×時間型の2種類がある．空間×空間型の平面は，空間軸が等方的であるので全等方的であり，ユークリッド平面とよばれる．空間×時間型の平面は，時間軸が一方的で空間軸が等方的であるので半等方的であり，ミンコフスキー平面とよばれる．

§1-2 特殊相対性原理

拡張キュリーの原理

キュリーの原理は「線型の物理現象では，原因の対称性は結果の中に見出される」というものである．この原理を拡張して「線型空間では，部分空間の対称性は全体空間の対称性に反映され，その逆もまた然り」とした．つまり，少なくとも空間の等方性と時間の一方性という直線即ち部分空間の対称性を用いて，平面の対称性や変換が説明されるべきである．

この観点から特殊相対論の論法を見直すと，ローレンツ変換を導く過程で，二つの異なる時間軸が同じ方向を持つ，という時間の一方性の対称条件は使われず，他方で空間の等方性の対称条件は使われている．時間の一方性は，現象論に基づく二つの原理の背後に隠れてしまっている．光速度不変の原理が，相対性原理とマクスウェルの光速の法則に依存していると考えると，残りの独立の相対性原理は，十分条件ではあっても必要条件ではないはずである．

相対性原理の定義

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を線型変換，f(p) と g(q) を関数，$p=\binom{x}{y}$ と $q=\binom{u}{v}$ を異なる右手座標系の点，$q=Ap$ がなりたつとし，定義により f(p)=f($A^{-1}q$) :=g(q) とする．もし g(q)=f(q) であれば f(p)=f(q) がなりたち，p と q のいずれの座標平面の世界にいるのか区別がつかない．これは異なる座標平面 p と q の上で同じ関数 f がなりたつことを意味し，どのように法則 f(p)=f(q) が生まれるかを示している．この仕組みを物理学では相対性原理とよび，幾何学のエルランゲン・プログラムの思想も同じである．

相対性原理の数学的定義は，　f(q)=<u>f(Ap)=f(p)</u> かつ <u>det A>0</u> である．

この原理はキュリーの原理とエルランゲン・プログラムの思想に従い「線型座標平面 p,q のもつ対称性は変換群 A に反映され，変換群 A のもつ対称性は不変関数 fに反映されて，それら不変量が幾何学をつくる」となる．

1862　クラインの講演「エルランゲン・プログラム」
「変換群で不変な図形の性質を研究するのが幾何学である」

1894　キュリーの原理
「線型の物理現象では，原因の対称性は結果の中に見出される」

§1-3 定理

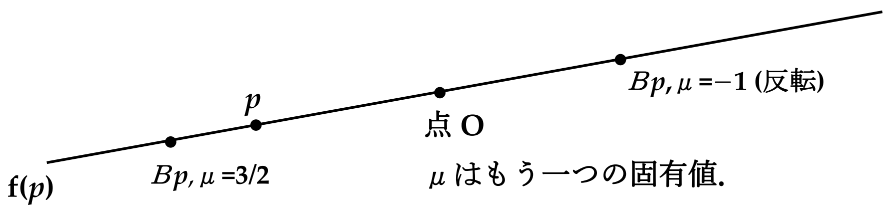
(注)これらの定理の証明は拙著『表裏対称平面の幾何』にある．

▪ 2×2 行列のもつ不変直線

行列 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のもつ不変直線 f(p)は，方程式 $\mathrm{f}(Bp) \equiv \mathrm{f}(p) = ux+vy$ を解いて得られる．即ち行列 B が固有値 $\lambda=1$ をもつとき，次の不変直線 f(p)をもつ．

$$\mathrm{f}(Bp) \equiv \mathrm{f}(p) = cx-(a-1)y. \tag{1}$$

(→P11 の図 1 で実例を参照)



μ はもう一つの固有値．

不変直線　$\mathrm{f}(p) = cx-(a-1)y$.

▪ 2×2 行列のもつ恒等式と 2 次不変関数

2×2 行列 A のもつ 2 次不変関数は，方程式 $\phi(Ap) \equiv \phi(p) = ux^2+vy^2+wxy$ を解いて得られる．即ち行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，点を $p=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，2 次関数を $\phi(p)=-cx^2+by^2+(a-d)xy$ とするとき，次の**恒等式**がなりたつ．

$$\phi(Ap) \equiv \det A \cdot \phi(p). \tag{2}$$

$\det A = 1$ のとき $\underline{\phi(Ap)=\phi(p)}$ がなりたち，変換 A は不変関数 $\phi(p)$ をもつという．これは相対性原理をみたし，対称性でキュリーの原理に従う．即ち座標平面 p，$q(=Ap)$ のもつ対称性は，変換 A に反映され，さらに変換 A の対称性は不変関数 $\phi(p)$ に反映される．

式(1)の計算　　$\mathrm{f}(Bp) = \mathrm{f}(ax+by,\ cx+dy)$

$= c\,(ax+by)-(a-1)(cx+dy) = acx+bcy-acx-ady+cx+dy$

$= cx+(bc-ad+d)y$　　　←「B は固有値 1, μ をもつから

$= cx+(d-\mu)y = cx-(a-1)y$　　　$a+d=1+\mu,\ ad-bc=1\mu$ より」

式(2)の計算　　$\phi(Ap) = \phi(ax+by,\ cx+dy)$

$= -c\,(ax+by)^2+b(cx+dy)^2+(a-d)(ax+by)(cx+dy)$

$= (ad-bc)\,[-cx^2+by^2+(a-d)xy] = \det A \cdot \phi(p)$

▪ 2×2 特殊線型行列の極形式

特殊線型行列 S は**可換係数** k,h を用いて次のように分解される．

$$S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+hb & b \\ kb & m-hb \end{pmatrix},$$
$$\text{ここに } \det S = m^2-\varDelta b^2 = 1,\ \varDelta = h^2+k,\ m=(a+d)/2, \tag{3}$$
$$k = c/b,\ 2h=(a-d)/b,\ b\neq 0.$$

共通の可換係数 k,h をもつ行列 S_1, S_2 は，$S_1S_2 = S_2S_1$ がなりたち，積 S_1S_2 の可換係数も k,h となる．また行列 S は式(4)のように，y^2 の係数で正規化された 2 次不変関数をもち相対性原理をみたす．

$$\underline{\phi(Sp) \equiv \phi(p)} = -kx^2+y^2+2hxy = r^2,\ \underline{\det S=1},\ p=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ r \text{は半径}. \tag{4}$$

行列 S と不変関数 $\phi(p)$ は，判別式 $\varDelta = h^2+k$ の正負により三つの型に分類される．

$\varDelta < 0$ のとき，それらは楕円型であり，

$\varDelta > 0$ のとき，それらは双曲型であり，

$\varDelta = 0$ のとき，それらは直線型である．

このようにして特殊線型行列 S ($\det S = m^2 - \Delta b^2 = 1$) は可換係数 k,h と偏角 θ を用いて次の様に表現される．このとき恒等式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ または $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$, 但し $\theta = 0$ のとき $S = E$ (恒等変換) の関係を用いている．

$$\Delta < 0 \text{ のとき，} S = S(\theta,k,h) = \begin{pmatrix} \cos\theta + \frac{h}{\sqrt{-\Delta}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\sin\theta \\ \frac{k}{\sqrt{-\Delta}}\sin\theta & \cos\theta - \frac{h}{\sqrt{-\Delta}}\sin\theta \end{pmatrix}, \tag{5}$$

楕円型，偏角θは正弦角

$$\Delta > 0 \text{ のとき，} S = S(\theta,k,h) = \begin{pmatrix} \cosh\theta + \frac{h}{\sqrt{\Delta}}\sinh\theta & \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sinh\theta \\ \frac{k}{\sqrt{\Delta}}\sinh\theta & \cosh\theta - \frac{h}{\sqrt{\Delta}}\sinh\theta \end{pmatrix}, \tag{6}$$

双曲型，偏角θは双曲角．

$$\Delta = 0 \text{ のとき，} S = S(b,h) = \begin{pmatrix} m + hb & b \\ -h^2 b & m - hb \end{pmatrix}, \text{ ここに } m = \pm 1, \text{ 直線型．} \tag{7}$$

特殊線型行列 S は偏角θの加法定理がなりたつ．

$$S(\theta_1,k,h)\, S(\theta_2,k,h) = S(\theta_1+\theta_2,k,h) \text{ または } S(b_1,h)\, S(b_2,h) = S(b_1+b_2,h)$$

いずれの2×2非対角正則行列 A も次の極形式で表わされる．

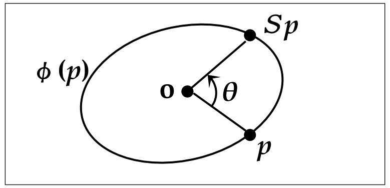
$$A = (\det A)^{1/2}\, S(\theta,k,h) \text{ または } A = (\det A)^{1/2}\, S(b,h). \tag{8}$$

偏角 θ は，図のように式(4)の不変関数 $\phi(Sp) \equiv \phi(p)$ 上で定義される交差角 $\theta = \angle(p, Sp)$ である．

図は $\phi(p)$ が楕円のとき

$\phi(Sp) \equiv \phi(p) = -kx^2 + y^2 + 2hxy = r^2$,

$\det S(\theta,k,h) = 1$.



■ 直線の対称性

線型平面の部分空間をなす直線に，原点の重なる 2 本の数直線 x_1,x_2 を張るとき，

$$x_2 = r x_1 \Leftrightarrow x_1 = r^{-1} x_2$$

これらの座標変換による対称性は $r = r^{-1} \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = \pm 1$.

$r = 1$ のとき数直線はぴったり重なり，直線は一方的，

$r = -1$ のとき数直線は反転対称で，直線は等方的，

$r \neq \pm 1$ のとき数直線は，相似である．

■ 拡張速度合成定理

ローレンツ変換より，速度定数 c として，次の速度合成定理がなりたつ．

$$v_{13} = -v_{31} = (v_{12} + v_{23}) / (1 + v_{12}v_{23} / c^2). \tag{9}$$

これを同値変形して: $(c - v_{12})(c - v_{23})(c - v_{31}) = (c + v_{12})(c + v_{23})(c + v_{31})$.

3をnに拡張して: $(c - v_{12})(c - v_{23}) \cdots (c - v_{n1}) = (c + v_{12})(c + v_{23}) \cdots (c + v_{n1})$.

§1-4 公理的方法

ユークリッド『幾何原本』の伝統から，現象論に基づく公理的方法が科学のお手本とされてきた．ガリレイ，ニュートン，アインシュタイン・・・らの著作・立論は，みなこの方法に倣っている．これに対して，本質論に基づく公理的方法と，定義に基づく公理的方法がある．

▪ 現象論に基づく公理的方法
基礎となる現象･真実 → 帰納 → 公理･公準･原理･仮説 → 演繹→ 定理･理論
▪ 本質論に基づく公理的方法
対象自身の本質･構造 → 帰納 → 公理･仮説 → 演繹 → 命題･定理･法則
▪ 定義に基づく公理的方法
独立性と無矛盾性をみたす公理系の定義 → 演繹 → 命題･定理

定義に基づく公理的方法はヒルベルトが『幾何学の基礎』で述べたもので，線型空間におけるユークリッド空間の定義などは，これである．

平面幾何学の公理を例にとり，現象論と本質論に基づく公理的方法の違いを対比する．

ユークリッド幾何：現象論に基づく公理	本論：平面の本質論に基づく公理
九つの共通公理(重なる物は等しいなど) 自明の真理として，つぎの 五つの幾何公準を要請	2 次元線型空間(ベクトル空間)の定義 平面の表裏対称性と因果律の公理 §3-1 1 公理を参照(→P9)

公準 1 任意の点から任意の点へ直線を引くこと
公準 2 有限の直線を連続して延長すること
公準 3 任意の点を中心として任意の半径の円を描くこと
公準 4 すべての直角は互いに等しいこと
公準 5 二つの直線と交わる直線の，同じ側の内角の和が 2 直角より小さいならば，この 2 直線を同じ側に限りなく伸ばして行けば，いつかは交わること

科学の本領の一つは，何故そうなるかを解き明かすことにあるが，現象論の弱点は，出発点となる現象からでしか答えられないことにある．その点本質論は，対象とする世界の構造やその物自身の有する対称性や因果関係から出発するので，必要条件から数学的構造が厳密に表現・推論でき，何故かに対する理解が本質にまで論理的につながり，また隠れている秩序や隣接科学との関連性が章かになることが強みである．ただ現象論は手っ取り早く立論する近道であり，早く先に進めるという利点がある．

本論は，本来あるべき平面の本質論に基づく公理的方法を目指した．

ポアンカレ『科学と仮説』1902
「幾何学の公理の本性は，・・・・それは規約である．我々の選択はあらゆる可能な規約のうちから実験的事実によって導かれて行ったのである」

「仮説探しは簡単さを発見するまで続く．まづ全く自然な除くことのできない仮説，例えば結果は原因の関数である，と仮定しないことは困難である．対称によってつけられた条件もそうである」

§2. 概要 Introduction

*キュリーの原理より，1次元の空間と時間による2次元時空間の模型で考える．

**赤色は裏面をしめす．

▪ 時空間の対称性が，自然法則をつくる．

キュリーの原理とエルランゲン・プログラムを考え合わせると，直線と平面と変換群と不変量と自然法則が，対称性という一本の糸でつながる．

直線 (部分空間：空間直線 or 時間直線)の対称性

↓

平面 (全体空間)の表裏対称性

↓

平面の表裏座標変換群の対称性

↓

座標変換群は必然的に，対称性を表現する不変関数をもつ．

↓

不変関数とその不変量により，自然法則がつくられる．

▪ 以上を数学的に表現する．

右手斜交座標系 x-y と u-v を平面の表裏に向き合うように張り，原点を合わせる．2×2 背面座標変換行列を B とすると $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，変換 B は裏返し(折返し)変換だから $\det B<0$，である．変換 B を鏡映変換 M で裏返して，右手座標系の間を変換する変換 A を導く．両辺に左側から M を作用させると，

$$M\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=MB\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\ \text{ここに}\quad M\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\text{と}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\text{は正面右手系である．}$$

$$A=MB=(\det A)^{1/2}\,S(\theta,k,h),\ \text{ここに}\ M=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \det A>0,\ \det S(\theta,k,h)=1. \quad (10)$$

$\det A=1$ のとき，特殊線型変換 S は，式(4)より不変関数 $\phi(Sp)\equiv\phi(p)=-kx^2+y^2+2hxy=r^2$ をもつので，**可換係数 k,h** が定まった特殊線型平面において，不変関数 $\phi(p)$ を軌道としノルム r を不変量とする，等長変換群 $S(\theta,k,h)$ の幾何がなりたつ．

(1) $\det A=1$ のとき，特殊線型平面に等長変換群 $S(\theta,k,h)$ の幾何がなりたつ．このとき (→§3 で証明)

(1-1) 可換係数 $h\neq0$ のとき，表裏非対称平面に等長変換群 ($S(\theta,k,h)$，不変関数 $\phi(Sp)\equiv\phi(p)=-kx^2+y^2+2hxy$) の幾何がなりたつ．

(1-2) 可換係数 $h=0$ のとき，表裏対称平面に等長変換群($S(\theta,k,0)$，不変関数 $\phi(Sp)\equiv\phi(p)=-kx^2+y^2$) の幾何がなりたつ．

(1-2-1) $k<0$ のとき，平面は全等方のユークリッド平面 (空間直線×時間直線)であり，ユークリッド幾何がなりたつ．

(1-2-2) $k=0$ のとき，平面は半等方のニュートン平面 (空間直線×絶対時間直線)であり，ニュートン力学がなりたつ．

(1-2-3) $k>0$ のとき，平面は半等方のミンコフスキー平面 (空間直線×時間直線)であり，特殊相対論がなりたつ．

(2) $\det A\neq1$ のとき，相似変換群の幾何がなりたつ．

時空間の自然科学の発展

時空間の対称性が，自然法則をつくる．

数学

BC300 頃 ユークリッド『幾何原本』

回転変換不変

1600〜 デカルト座標系と解析幾何

1687 ニュートン 微分積分

1850〜 線型代数が発展，線型空間と線型構造

反転変換不変

1862 クライン「エルランゲン･プログラム」

変換不変

「変換群で不変な性質を研究するのが幾何学である」

1899 ヒルベルト『幾何学の基礎』無矛盾公理系

代数的概念
座標系
線型空間
線型構造
対称性
因果律

物理

160 頃 プトレマイオス『天文学大全』天動説（惑星逆行を周天円で説明）

1543 コペルニクス『天球の回転について』地動説（太陽中心円説）

1576-1601 チコ・ブラーエ 大天文台の建設，天球と惑星軌道を観測

1619 ケプラー 惑星軌道を解析，『宇宙の調和』惑星運動の 3 法則

1638 ガリレイ『新科学対話』相対性原理の着眼と落下の法則

慣性系不変

1687 ニュートン『プリンシピア』「運動の法則は慣性系で不変」

ガリレイ変換不変

1865 マクスウェル 光の波動方程式

1878 マイケルソン=モーリーの実験，絶対運動の反証

1894 キュリーの原理「線型の物理現象では，原因の対称性は結果の中に見出される」

1905 アインシュタイン 特殊相対性理論

ローレンツ変換不変

幾何的概念
表裏平面
相対性
慣性系
変換群
変換不変量

1916 アインシュタイン 一般相対性理論 → 非線型空間の宇宙

自然法則のしくみ

時間の一方性と空間の等方性，即ち時間直線と空間直線の対称性が時空平面の表裏対称性に反映され，

時空平面の表裏対称性が表裏座標変換群の対称性に反映され，

さらに座標変換群の対称性が必然的に，変換しても変わらないもの，すなわち不変関数と不変量をもつ．

つまり，時間と空間の対称性を受継ぐ不変関数と不変量を骨組みとして，自然法則（数学の定理や物理の法則）がつくられる．

§3 相対性原理の証明

§3-1 表裏対称平面

1 表裏対称平面公理

a.[構造] 時空間の平面は，2 次元の線型空間 (ベクトル空間)の定義がなりたつ．この対称性には空間と時間の反転不変，空間と時間の平行移動不変が含まれる．
b.[因果律] 部分空間の対称性は全体空間の対称性に反映され，逆もまた然り．
c.[対称性] 時空間の平面は，表裏の区別ができない．
d.[対称性] 空間直線(部分空間)は等方的である．
e.[対称性] 時間直線(部分空間)は一方的である．

2 二つの平面に異なる座標系を張るとき，二つの平面を区別できるが，合同な座標系を張るとき区別できない．表裏対称平面は，表裏は合同な座標平面であり，かつ背中合わせである．日本語には「裏をとる」という表現があり，隠れた裏側でもなりたつことが，真理と真実を保証することになる．

3 平面の表裏に，互いに右手系で向き合う斜交座標系 x-y と u-v を張り，原点を合せる．背面座標変換を 2×2 行列 B で表わすと，次がなりたつ．

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\ \text{裏返し変換だから}\ \det B<0. \tag{11}$$

4 平面の表裏は区別できないので，表裏対称平面方程式とその解が求まる．

$$\begin{gathered}B=B^{-1}\Leftrightarrow B^2=E(\text{恒等変換}),\ \text{ここに}\ \det B<0.\\ \text{解は斜鏡映変換}\ B=\begin{pmatrix}-a&-b\\c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a&-b\\kb&a\end{pmatrix},\\ \det B=-a^2+kb^2=-1,\ k=c/b,\ \text{固有値}\ \lambda=\pm1.\end{gathered} \tag{12}$$

変数a,b,cの符号は任意に設定することができる．式(1)の設定とは異なることに注意

5 対称性が，立場を入替えても変わらないもの，すなわち法則を生む．このとき立場は対等でなければならない．
また，法則は慣習として右手座標系で記述される．
この仕組が相対性原理であり，その思想がエルランゲン・プログラムである．
一つの自然現象を二つの座標系から同時に見るとき，両系の視座を右手系に揃える．透明な表裏対称平面上の自然現象や図形や法則を平面の表と裏から記述するとき，表裏の座標系の視座を正面右手系に揃える．そのため裏面右手系$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$を鏡映変換$M$で反転して，正面右手座標系間の変換$F$を導く．

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow M\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=MB\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-u\\v\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}x_F\\y_F\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\\ \text{ここに}\ F=MB=\begin{pmatrix}a&b\\kb&a\end{pmatrix}=S(\theta,k,0),\ M=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \det F=1,\\ k=c/b,\ 2h=(a-a)/b=0,\end{gathered} \tag{13}$$

固有値 $\lambda=a\pm\sqrt{k}b$，固有直線 $y=\pm\sqrt{k}x$，また k,h は式(3)の可換係数．

この変換Fを特殊等対角変換という．この変換Fは，裏面座標系のu軸を鏡映変換Mでx反転（$x_F=-u$，$y_F=v$）して，正面右手系x_F-y_Fとなし，正面右手系x-yと視座を揃えたものである．

6 式(4)でh=0とすると特殊等対角変換Fは，式(14)のような2次不変関数$\phi(p)$をもち，これは相対性原理をみたす(下線部)．関数$\phi(Fp)$は裏面にある．さらに斜鏡映変換$B=MF$も2次不変関数$\phi(Bp)$をみたす．

$$\phi(Bp)=\underline{\phi(Fp)\equiv\phi(p)}=-kx^2+y^2=r^2,\ \underline{\det F=1}. \tag{14}$$

$\phi(p)$は，$\begin{pmatrix}x_F\\y_F\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ からも得られる．
式(11)-(14)が表裏対称平面になりたつ関係の要諦である．従って表裏対称平面になりたつ自然法則は，その中に不変関数$\phi(p)$と不変量rの関係が骨格とし

て埋め込まれ，平面の対称性を担保するため，式(14)を満たす必要がある．

以下，斜鏡映変換Bのもつ性質を列挙する．

7 斜鏡映変換Bの表裏の座標軸方程式(15)は置換対称であるので，表裏の座標系x-yとu-vは合同である．(→図0参照)

$$\begin{aligned}&\text{表面:}\ v\text{-axis: } u=-ax-by=0,\quad u\text{-axis: } v=kbx+ay=0,\\&\text{裏面:}\ y\text{-axis: } x=-au-bv=0,\quad x\text{-axis: } y=kbu+av=0.\end{aligned} \tag{15}$$

8 変換Bは固有値 $\lambda=1$ をもつので，式(1)から変換Bは不変直線 $\mathrm{f}(p)$をもつ．ただし $a\to-a$ と置く．（変換Bの設定が式(1)とは異なるので）

$$\mathrm{f}(Bp)\ \equiv\ \mathrm{f}(p)=cx+(a+1)y. \tag{16}$$

9 固有値$\lambda=1$⇔不動点方程式$Bp=p$において，この固有直線(部分空間)を折返し線fという．

$$f\!: cx+(a-1)y=0. \tag{17}$$

10 固有値$\lambda=-1$⇔反転方程式$Bp=-p$において，この固有直線(部分空間)を等方線gという．

$$g\!: cx+(a+1)y=0. \tag{18}$$

この等方線gは原点に対して等方的であり，また式(16)で与えられる不変直線 $\mathrm{f}(p)$に平行である．点pが不変直線 $\mathrm{f}(p)=s$ 上にあり，不動点rが折返し線fと不変直線 $\mathrm{f}(p)$ の交点であるとき，折返し線f上では $Br=r$，不変直線上では $\mathrm{f}(Bp)=\mathrm{f}(p)=\mathrm{f}(r)$ がなりたつ(→図0，図1参照)．ベクトル$(p-r)$を等方線g上に平行移動させることにより式(19)を得る．

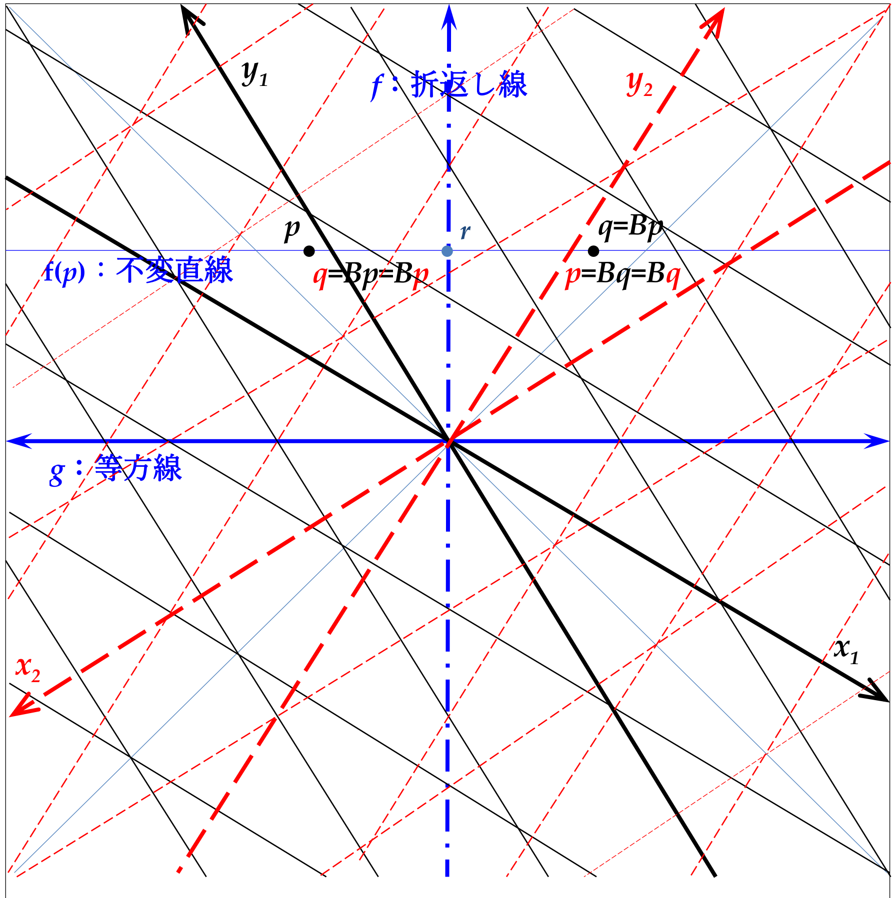


図0 斜鏡映平面の表面と裏面（ミンコフスキー平面の例）

$$B(p-r)=-(p-r) \Leftrightarrow Bp-r=-p+r \Leftrightarrow Bp+p=2r,\ \text{ここに}\ \mathrm{f}(Bp)=\mathrm{f}(p)=\mathrm{f}(r). \tag{19}$$

不動点（折返し点）rは点pとBpの中点だから，不変直線 $\mathrm{f}(p)$は不動点rを中心に等方的である．　(青色は表裏同形を示す)

11 図０と図１と図２は，同じミンコフスキー平面の例 $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5&4\\-4&5\end{pmatrix}=B^{-1}$, k=1, $\phi(p)=-x^2+y^2=1$ を示す．図０は座標系を表裏対称に描き，図１は座標系 x-y を従来型の直角に描いたものである．ただし $(x_1$-$y_1)=(x$-$y)$, $(x_2$-$y_2)=(u$-$v)$とする．

折返し線 f は、y_1軸(y 軸)と y_2軸(v 軸)の中線である．

斜鏡映変換 B には２つの機能がある．

a. 図形反転変換: $p=\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$, $Bp=q=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 同一座表平面上で反転変換.

これは変換Bを図形の写像と解釈したものである．

b. 背面座標変換: $Bp=q=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 表面座標から裏面座標に変換.

$p=Bq$, $p=Bq=\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$, $r=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=(p+q)/2=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=r$

12 斜鏡映変換Bに属する二つの固有直線(部分空間)すなわち折返し線fと等方線gは，固有平面をつくる．固有直線f,gおよび不変直線f(p)は，それぞれが表裏同形の式でかつ表裏で重なる．二つの固有直線は図では一般に斜交するが，式(44)から数式では内積が0となり直交する(→図0，図1).

$$\text{内積：}-kx_1x_2+y_1y_2=-k(a-1)\cdot(a+1)+kb\cdot kb=-k(a^2-kb^2)+k=0. \tag{20}$$

この固有平面を**斜鏡映平面**という．§3-2 で詳述するように，可換係数 k および h=0 の定まった表裏対称平面において，任意の原点を中心に方向の異なる折返し線 f が無数に存在する．不動点 r は点 p と Bp の中点であるので，この斜鏡映平面は折返し線 f を斜鏡映軸線に，等方線 g および不変直線群 f(p)を反転線にして，反転対称(斜鏡映対称)であり半等方的である．故に，この平面の部分空間として折返し線 f は時間軸(一方的)に，等方線 g は空間軸(等方的)に相当するとしてもよい．式(15)から斜鏡映平面は表裏対称である(→図 0)． y 軸と v 軸のなす角を 0 に近づけたとき，両者は折返し線 f と重なり，このとき斜鏡映変換 Bは，その対角化行列である鏡映変換 $M=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$となる．

13 特殊等対角行列 Fの極形式

特殊線型行列 Sの極形式 (5)-(7) から，特殊等対角行列 $F(\theta,k)=S(\theta,k,h)$, $h=0$ の極形式を得る． θ は座標系の y 軸と v 軸がつくる偏角とよぶ交差角である．

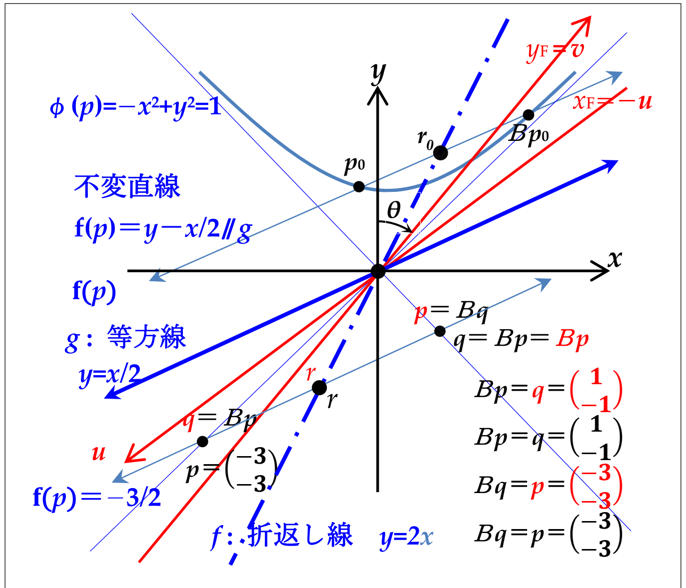


図１ 斜鏡映平面

$$k<0 \text{ のとき，} F=\begin{pmatrix}a&b\\kb&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta/\sqrt{-k}\\-\sqrt{-k}\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}, \theta \text{ は正弦角.} \tag{21}$$

この行列 Fは楕円変換である．特に $k=-1$ のとき，θ は回転角，行列 Fは回転変換，行列Bは鏡映変換であり，両者は直交変換である．

$$k>0 \text{ のとき，} F=\begin{pmatrix}a&b\\kb&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\theta&\sinh\theta/\sqrt{k}\\\sqrt{k}\sinh\theta&\cosh\theta\end{pmatrix}, \theta \text{ は双曲角.} \tag{22}$$

この行列 Fはローレンツ変換である．

$$k=0 \text{ のとき，} F=\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a=\pm 1. \tag{23}$$

この行列 F はガリレイ変換である．

14 特殊等対角変換 $F(\theta,k)=S(\theta,k,0)$ は，式(14)から次の式(24)がなりたつ．またB=MF，$\phi(Mp)=\phi(p)=-kx^2+y^2$ だから，斜鏡映変換 B と特殊等対角変換 F は次のように共通の不変関数 $\phi(p)$ をもち，$\phi(p)$ 上の可換群をつくる．

$$\begin{gathered}
\phi(Fp)\equiv\phi(p)=-kx^2+y^2 \text{ より} \\
\phi(F^2p)=\phi(F(Fp))=\phi(Fp)=\phi(p), \\
\phi(p)=\phi(Ep)=\phi(F(F^{-1}p))=\phi(F^{-1}p), \\
\phi(F_1F_2F_3p)=\phi(F_1(F_2F_3p))=\phi(F_2F_3p)=\phi(F_3p)=\phi(p), \\
\phi(Bp)=\phi(M(Fp))=\phi(Fp)=\phi(p), \\
\phi(BFp)=\phi(FBp)=\phi(p), \\
\text{ここに } M=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, p=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{24}$$

可換係数 k を平面に固定したとき，行列 F と B は θ の 1 自由度をもち，これらの積はいずれも共通の不変関数 $\phi(p)$ の軌道上で閉じている．例えば次のように．

$$\begin{aligned}
&\phi(BF^2\ldots B^{-1}F^{-1}p)=\phi(F^2\ldots B^{-1}F^{-1}p)=\phi(F\ldots B^{-1}F^{-1}p) \\
&=\phi(B^{-1}F^{-1}p)=\phi(BF^{-1}p)=\phi(F^{-1}p)=\phi(p)=-kx^2+y^2=r^2.
\end{aligned} \tag{25}$$

15 表面における右手系の図形変換 X ($\det X=1$)は，座標変換 F と逆変換の関係($FX=E$)にあり，両者は可換である．裏面における右手系の図形変換 Y($\det Y=1$)も同様である．原論文では，これを式(26)-(30)により証明している．

結局，変換 B,F,X,Y とそれらの任意の積は，次のように共通の 2 次不変関数 $\phi(p)$ をもち，

$$\phi(Bp)=\phi(Fp)=\phi(Xp)=\phi(Yp)=\phi(p)=-kx^2+y^2=r^2 \tag{31}$$

を軌道として，ノルム $\|p\|=r$ と定める等長変換可換連続群の幾何をつくる．

$$\|Bp\|=\|Fp\|=\|Xp\|=\|Yp\|=\|p\|=r. \tag{32}$$

§3-2　k の符号の意味は何か．表裏対称平面の 3 つの型

平面に任意の原点をおくとき，表裏対称座標平面の対称性は，可換係数 k および $h=0$ に表現され，同時に背面座標変換 B および不変関数 $\phi(p)$ に反映される．即ち対称性が異なるそれぞれの表裏対称平面群に対して，一つの k の値と斜鏡映変換群 B と一つの不変関数 $\phi(p)$ とが対応し，一つの斜鏡映変換 B に対して，一つの特殊等角変換 F と一つの偏角 θ と，そして一つの斜鏡映平面が対応する．斜鏡映平面は，その部分空間として表裏に重なる等方的な等方線 g と，一方的な折返し線 f をもち，半等方平面である．偏角 θ は，変換 B がつくる y 軸と v 軸の交差角である．偏角 θ が全実数をとるとき，斜鏡映平面を代表する等方線 g と折返し線 f の存在領域は，可換係数 k の正または負に依存する．

(1) $k<0$ のとき， F は楕円型変換である。変換 B の極形式は式(21)から

$$B=MF=\begin{pmatrix} -a & -b \\ c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta/\sqrt{-k} \\ -\sqrt{-k}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, b=\frac{1}{\sqrt{-k}}\sin\theta,\ c=kb. \tag{33}$$

折返し線 f と等方線 g は式(17)，(18)より

$$\begin{aligned}
&\text{折返し線 } f: y=\frac{-c}{a-1}x=\sqrt{-k}\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}x=\sqrt{-k}\cot\frac{\theta}{2}\cdot x=lx, \\
&\text{等方線 } g: y=\frac{-c}{a+1}x=\sqrt{-k}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}x=\sqrt{-k}\tan\frac{\theta}{2}\cdot x=mx,
\end{aligned} \tag{34}$$

両直線 f,g の傾きは: $-\infty<l<\infty,\ -\infty<m<\infty.$

偏角 θ の半角は，折返し線 f と等方線 g の方位を決める．正弦角 θ が全実数をとるとき，折返し線 f の存在領域は，原点を中心に全方位に分布し，折返し線 f 自身は反転対称すなわち等方的となる．従って，この表裏対称平面は空間×空間型の全等方平面と考えられる。この平面を楕円型平面または拡張ユークリッド平面とよび，楕円型平面幾何学がなりたつ．特に $k=-1$ のとき，不変関数 $\phi(p)=x^2+y^2$ は円であり，この平面はユークリッド平面であり，変換 B, F は直交変換とよばれ，ユークリッド幾何学がなりたつ．

(2) $k>0$ のとき，変換 F はローレンツ変換である．変換 B の極形式は式(22)から

$$B=MF=\begin{pmatrix}-a & -b\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cosh\theta & -\sinh\theta/\sqrt{k}\\ \sqrt{k}\sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix},\ b=\frac{1}{\sqrt{k}}\sinh\theta,\ c=kb. \tag{35}$$

折返し線 f と等方線 g は式(17)，(18)から

$$\begin{aligned}&\text{折返し線 } f: y=\frac{-c}{a-1}x=-\sqrt{k}\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta-1}x=-\sqrt{k}\coth\frac{\theta}{2}\cdot x=lx,\\ &\text{等方線 } g: y=\frac{-c}{a+1}x=-\sqrt{k}\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta+1}x=-\sqrt{k}\tanh\frac{\theta}{2}\cdot x=mx.\end{aligned} \tag{36}$$

$$\text{漸近線}: y=\pm\sqrt{k}x. \tag{37}$$

偏角 θ の半角は，折返し線 f と等方線 g の方位を決める．それらの存在領域は：
・折返し線 f の傾き l は, 両漸近線によって分割された上下の象限 $-\infty<l<-\sqrt{k}$ と $\sqrt{k}<l<\infty$ にあり，
・等方線 g の傾き m は，左右の象限 $-\sqrt{k}<m<\sqrt{k}$ にある(→図 1，図 2 参照).
双曲角 θ が全実数をとるとき，斜鏡映平面を代表する折返し線 f の存在領域は，上下の象限に偏在する．不変関数 $\phi(p)$ の上部の双曲線上の点 $p=\begin{pmatrix}0\\ t_1\end{pmatrix}$, $t_1>0$ は，折返し線 f(折返し点 r) を挟んで同じ象限の双曲線上の点 Bp に推移的に変換されて，$f(Bp)=f(p)=f(r)$，$\phi(Bp)=\phi(p)$，$p+Bp=2r$ がなりたち，点 p と Bp と点 r の y 座標は共に正(上向き)に揃う．さらに，表裏に重なる折返し線 f は，ともに正向きの合同である．また，すべての等方線 $p-Bp$ が折返し点 r に対して等方的であることから，この表裏対称平面は空間(等方線 g)×時間(折返し線 f) 型の半等方時空平面であると考えられる．この平面をミンコフスキー平面とよび，双曲型平面幾何，即ちミンコフスキー平面幾何がなりたつ．

(3) $k=0$ のとき，変換 F はガリレイ変換である．変換 B の極形式は式(23)から

$$\begin{gathered}B=MF=\begin{pmatrix}-a & -b\\ 0 & a\end{pmatrix},\ a=\pm1,\ \det B=-1.\\ \text{折返し線 } f: x=-by/2\ (a=1\text{のとき}),\ \text{等方線 } g: y=0\ (x\text{-軸}),\\ \text{不変直線}: f(Bp)=f(p)=y,\\ 2\text{次不変関数}: \phi(Bp)=\phi(Fp)=\phi(p)=y^2.\end{gathered} \tag{38}$$

$y=t$（時間）と考えると，時間は不変関数 $\phi(Fp)=\phi(p)=t^2$ の不変量であり，ニュートンの絶対時間の考えと一致するので，この平面をニュートン平面とよぶ．この平面は半等方的であり，斜鏡映平面の空間軸（$y=0$）は表裏で共有される．

以上のことから，表裏対称平面 ($h=0$)は可換係数 k の値の違いにより，楕円型平面(ユークリッド平面を含む)，ミンコフスキー(双曲型)平面，ニュートン平面の 3 種類である．これらの表裏対称平面は式(14)から相対性原理をみたし，その対称性でキュリーの原理に従う．即ち平面の表裏対称性は，特殊等対角変換 F およびその不変関数である $\phi(p)$ に反映される．よって，表裏対称平面になりたつ法則や定理の中に見出される平面の対称性は，自然法則が不変関数 $\phi(p)$ および不変量 r を骨格として造られるからと考えられる．

次ページに表裏対称平面幾何の可換係数 k,h による分類表を掲げる．

表 裏 対 称 平 面 幾 何 分 類 表

公理	h	k	線型平面の名称	対称性	線型変換群	不変関数 $\phi(p)$ とノルム r	なりたつ幾何
a	／	／	アフィン平面	片面線型	A 一般線型変換		アフィン幾何
ab	h	k	表裏線型平面	表裏区別	$S(\theta,k,h)$ 特殊線型変換	$\phi(p)=-kx^2+y^2+2hxy=r^2$	表裏区別平面幾何
abc	0	k	表裏対称平面	表裏対称	$F=S(\theta,k,0)$ 特殊等対角変換	$\phi(p)=-kx^2+y^2=r^2$	表裏対称平面幾何
abcd	0	$k<0$	楕円型平面	全等方	$F=S(\theta,k,0)$ 楕円変換	$\phi(p)=-kx^2+y^2=r^2$	楕円型平面幾何
abcd	0	$k=-1$	ユークリッド平面	全等方直交	$R=S(\theta,-1,0)$ 回転変換	$\phi(p)=x^2+y^2=r^2$	ユークリッド幾何
abcde	0	$k=0$	ニュートン平面	半等方	$G=S(b,0)$ ガリレイ変換	$\phi(p)=y^2=r^2$	ニュートン力学
abcde	0	$k>0$	ミンコフスキー平面	半等方	$L=S(\theta,k,0)$ ローレンツ変換	$\phi(p)=-kx^2+y^2=r^2$	特殊相対論

* 公理 a.b.c.d.e は，§3.1 第 1 項で定めた公理である．k,h は可換係数．

§3-3 二つの慣性座標系の対称的時空構造

一定の速度 v で直線上を近づき遠ざかる 2 つの慣性座標系 S1，S2 を考える．両系は対等である．二つの慣性座標系のそれぞれが空間×時間の右手系から他方を見るとき，速度および空間軸の正の向きが逆の関係にあるので，二つの系は半等方時空平面（仮にミンコフスキー平面とする）の表裏の合同な座標系に相当する．両慣性座標系の原点を一致させる．図 2 では，S1 の座標軸 x_1-t_1 が表側，S2 の座標軸 x_2-t_2 が裏側にある．背面座標変換は，斜鏡映変換 B である．ミンコフスキー平面上では，特殊等対角変換 F はローレンツ変換 L $(=MB)$ である．この変換は，表面座標系 S1 から，裏面座標系 S2 を裏返した正面右手系のローレンツ座標系 SL(x_L, t_L) に，以下のように変換する．

$$\begin{pmatrix}x_2\\t_2\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x_1\\t_1\end{pmatrix}\Leftrightarrow M\begin{pmatrix}x_2\\t_2\end{pmatrix}=MB\begin{pmatrix}x_1\\t_1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-x_2\\t_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_L\\t_L\end{pmatrix}:=L\begin{pmatrix}x_1\\t_1\end{pmatrix},$$

$$\text{ここに } L=MB=\begin{pmatrix}a & b\\kb & a\end{pmatrix}. \qquad (39)$$

ローレンツ変換の展開形は　$x_L=ax_1+bt_1$, $t_L=kbx_1+at_1$, ここに　$k>0$.

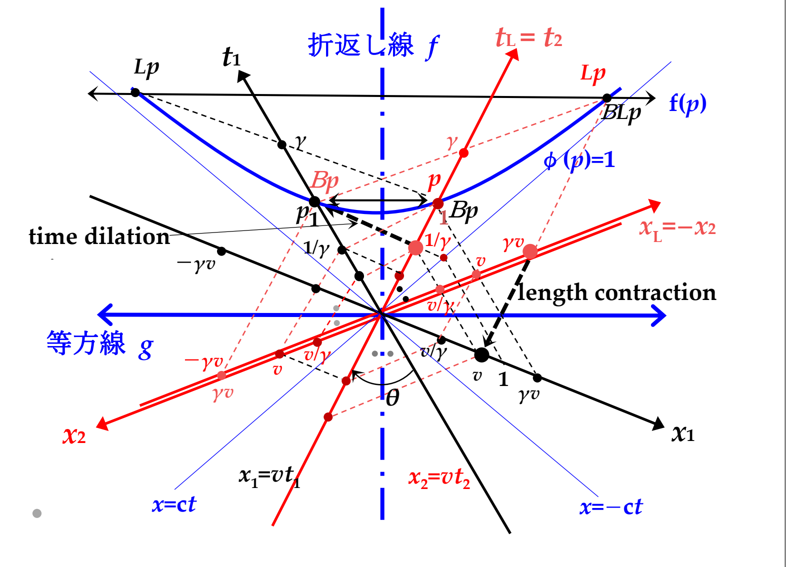


図 2 ミンコフスキー平面上の 2 つの慣性座標系

(*赤色は裏面，青色は表裏同形を示す)

第 1 式より，a は単位を持たない定数，b は速度定数である．x_1-t_1 座標系では，S2 の運動は $x_1=vt_1$ と表わされ，t_L 軸の式は $x_L=ax_1+bt_1=0$ なので，$v=x_1/t_1=-b/a$ である．第 2 式において，k は速度の 2 乗の逆数であり，速度定数 c を慣例により $k=1/c^2$ とする。$\det L=1$ なので，$a=(1-v^2/c^2)^{-1/2}=\gamma\geqq 1$ が得られる．このように，2 つの慣性座標系から速度 v およびローレンツ変換 L とその斜鏡映変換 B の関係は，具体的な式（40）に求められる．

$$L=\gamma\begin{pmatrix}1 & -v\\ -v/c^2 & 1\end{pmatrix},\ B=\gamma\begin{pmatrix}-1 & v\\ -v/c^2 & 1\end{pmatrix}=ML,\ \det B=-1,$$
$$L^{-1}=\gamma\begin{pmatrix}1 & v\\ v/c^2 & 1\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}-v\\1\end{pmatrix},\ \gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2},\ k=1/c^2\ \text{は可換係数.} \tag{40}$$

直線上の任意の二つの慣性座標系は, 図 2 のように対称形に描くことができる．図 2 は図 1 と同じ $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -4 & 5\end{pmatrix}$, $k=c=1$, $v=4/5$, $\gamma=5/3$ である．図 1 を折返し線 f と等方線 g を直交させて描くと図 2 を得るが，$y=t$ と読み替える．

折返し線 f：$t=2x$，等方線 g：$t=x/2$.

$$L\begin{pmatrix}v\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1/\gamma\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}\gamma v\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1\\-v/c^2\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}v\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1/\gamma\end{pmatrix},\ f\text{: } B\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix},$$
$$g\text{: } B\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix},\ x=ct\text{: } B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3\\1/3\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix},\ \phi(p)=-x^2+t^2=1.$$

図 2.から，自分の慣性座標系(S1)を静止していると見て，動く相手の慣性座標系(SL)の時間軸の膨張(time dilation)，即ち相手系の時間の遅れ，および空間軸の縮小(length contraction)，即ち相手系の長さの縮みを読みとることができる．

最高普遍速度 c

式(9)から，慣性座標系の限界速度が得られる（c は速度定数）．

$$(c-v_{12})(c-v_{23})\cdots(c-v_{n1})=(c+v_{12})(c+v_{23})\cdots(c+v_{n1}) \tag{9}$$
$$\Leftrightarrow\ (c-v_{12})^2(c-v_{23})^2\cdots(c-v_{n1})^2=(c^2-v_{12}^2)(c^2-v_{23}^2)\cdots(c^2-v_{n1}^2)\geqq 0, \tag{41}$$
$$\Leftrightarrow\ n\ \text{は自然数，}\ c^2-v_{ij}^2\geqq 0\ \Leftrightarrow\ (v_{ij}-c)(v_{ij}+c)\leqq 0,\ \therefore -c\leqq v_{ij}\leqq c.$$

ここに v_{ij} は慣性系 i から j をみた速度である．

慣性座標系のいかなる相対速度 v_{ij} も，普遍的な速度を意味する速度定数 c を超えることができない．マクスウェルの法則から，慣性系において光速は定数であり，また自然界の最高速度は真空中の光速である．時空平面において表裏対称性を保証する平面の可換係数（$h=0$, $k=1/c^2$）の存在により，最高普遍速度定数 c は真空中の光速(最高速度)であり，従って時空平面はミンコフスキー平面でなければならない．これは，マクスウェルの光速の法則に相対性原理を適用したことと同じである．

§4 結論

ユークリッド幾何学の見直し

ユークリッド幾何学の場合，地面に描いた図形の科学という出自からか，平面の裏側は無視されるか，または表裏は一体で同じ幾何がなりたつことは，暗黙裡に当然であった．確かに平面の表裏に区別はなく，すべての定理は同様になりたつはずである．しかし透明平面に描かれた任意の図形を正面と背面から同時に見るとき，一般に左右の方向が逆の図形を見ることになる．重なるものは等しい(対等である)とすれば，左右逆向き(または逆回り) の図形であっても，幾何の定理は同じであり平面は等方的である，という隠れた自然の対称性に気付かなかった．折返して重なるということの意義を認識せず，現象論として第三公準(円と半径) と第四公準(直角合同) を設けている．従って，表裏で重なる固定線分(半径 OR=r) の，点 O を中心とした全方位の折返しから表裏に重なる半径 r の円ができることや，表裏で同じ定理がなりたつ過程は証明していない．この現象論に基づく公理的方法は，平面の表裏対称から，円が生まれユークリッド幾何学がなりたつという，より根本的な原因を見逃すこととなった．

自然法則（物理法則や幾何定理）のなりたち

$$\text{表裏対称平面方程式}\ B=B^{-1},\ \text{背面座標変換}\ \ Bp=q,\quad \text{図形反転変換}\ \ Bq=p\ \ \text{より},\ p=B^{-1}q=Bq=p,\ \text{故に}\ \ \mathrm{f}(p)=\mathrm{f}(p). \tag{42}$$

表裏対称平面の表面でなりたつ事象 f は同様に裏面でもなりたつ．ただし，表裏対称とは平面になりたつ自然法則が，表裏で左右逆向きに見えても，表面と裏面で同様にかつ背中合せ(同時)になりたつことである．

平面上の一つの自然現象や法則を平面の表と裏から統一的に記述するとき，表裏対称により同様となる道筋を明示的に示せる筈である．法則や定理は表裏の立場を入替えても変わらない関係をみたすものであるが，変わらないものの存在が必要であり，それらは平面の対称性に由来するであろう．またキュリーの原理より，対称性は原因から結果へ，部分空間から全体空間へと反映される．このとき二つの立場は視座(右手系か左手系か）として対等でなければならない．また法則は慣習として右手系で記述される．

表裏対称平面に張る向き合う二つの合同な座標系 x-y と u-v の関係は，式(13)に示すように背面右手系 u-v を裏返して正面右手系 x_F-y_F とし，正面右手系 x-y と立場を対等にする．

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow M\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=MB\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-u\\v\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}x_F\\y_F\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$
$$\text{ここに}\ F=MB=\begin{pmatrix}a&b\\kb&a\end{pmatrix}=S(\theta,k,0),\ M=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \det F=1, \tag{13}$$
$$k=c/b,\ 2h=(a-a)/b=0,$$

固有値 $\lambda=a\pm\sqrt{k}b$，固有直線 $y=\pm\sqrt{k}x$，また k,h は式(3)の可換係数．

このとき特殊等対角変換 F に相対性原理(下線部)を表わす恒等不変式(14)がなりたつ．表面から裏面へと立場を替えるのが変換 F であり，変わらない関係が 2 次不変関数 $\phi(p)$ と不変量 r である．

$$\phi(Bp)=\underline{\phi(Fp)\equiv\phi(p)}=-kx^2+y^2=r^2,\ \underline{\det F=1}. \tag{14}$$

直線(部分空間）の対称性が表裏対称平面をつくり，表裏対称性が座標変換 B に反映される．このとき平面の表裏対称性を規定する可換係数 k, h=0 が定まる．この可換係数 k の正零負により，変換 B の対称性が特殊等対角変換 $F=MB$ に反映され，さらに変換 F のもつ不変関数 $\phi(Fp)\equiv\phi(p)$ に反映される．

時空平面になりたつ自然法則が平面の対称性に立脚するためには，自然法則は可換係数 k を含む不変関数 $\phi(p)=-kx^2+y^2=r^2$ とその不変量 r を骨組みとして造られることが十分であり，法則が平面の対称性を担保するため特殊等対角変換 F 不変であることが必要である．

以上より，表裏対称平面になりたつ自然法則を含む全ての関係は，不変関数 $\phi(p)$ とその不変量 r を骨格として，それらを組み合わせた次の様な形式となる．

$$\phi(F(p_1\pm p_2))=\phi(p_1\pm p_2)\ \ \text{または}\ \ \phi\left(F\frac{d}{dr}p\right)=\phi\left(\frac{d}{dr}p\right). \tag{43}$$

これは即ち 2 次元空間における相対性原理の仕組み，およびエルランゲン・プログラムの思想に他ならない．このような，式(31), (32), (43)に基づいた変形の組合せを，ミンコフスキー平面やニュートン平面の物理法則や，ユークリッド平面やミンコフスキー平面の幾何定理に，見出すことができる．

例えば，表裏対称平面の内積は，$\phi(Fp)=\phi(p)=-kx^2+y^2=r^2=\|p\|^2$ から次のように導かれる．

$$\triangle Op_1p_2\text{において},\ O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix},\ p_2=Ap_1\ \text{として}$$
$$\text{内積}\quad (p_1,p_2)=(\phi(Fp_1)+\phi(Fp_2)-\phi(F(p_1-p_2)))/2 \tag{44}$$
$$=(\phi(p_1)+\phi(p_2)-\phi(p_1-p_2))/2=-kx_1x_2+y_1y_2.$$

式(8)から可換係数 $k,h=0$ をもつ表裏対称平面上の図形変換 A は

$p_2 = Ap_1 = (\det A)^{1/2}\, S(\theta,k,0)\, p_1 = (\det A)^{1/2}\, F(\theta,k)\, p_1$ と表わされる．

これを右辺に代入して

$(p_1, p_2) = \| p_1 \| \| p_2 \| \cosh\theta$ （$k>0$，ミンコフスキー平面のとき），

または $(p_1, p_2) = \| p_1 \| \| p_2 \| \cos\theta$ （$k<0$，拡張ユークリッド平面のとき）

がなりたつ．さらに，直角三角形 Op_1p_2 において$(p_1, p_2)=0$ (直交)のとき，ピタゴラスの定理は式(44), (32)から

$$\| Fp_1 \|^2 + \| Fp_2 \|^2 = \| p_1 \|^2 + \| p_2 \|^2 = \| p_1 - p_2 \|^2$$

がなりたち，式は裏と表の座標平面で同形である．

この論文は，次のことを論証している．

平面の線型構造を基礎として，

空間×空間型平面（ユークリッド平面）の表裏対称性から，鏡映変換群と回転変換群がなりたち，ユークリッド幾何学を形成する．

また，空間×絶対時間型平面（ニュートン平面）の表裏対称性から，斜鏡映変換群とガリレイ変換群がなりたち，ニュートン力学を形成する．

さらに，空間×時間型平面（ミンコフスキー平面）の表裏対称性から，斜鏡映変換群とローレンツ変換群がなりたち，相対性原理を形成する．そこから，ミンコフスキー平面幾何学と特殊相対性理論が成立する．

謝辞

本論文の作成にあたり，鋭くそして哲学的な助言をいただいた Gregorie Dupuis-Mc Donald 博士に，感謝の意を表します．

不足している証明や詳細説明は，本論文または拙著『表裏対称平面の幾何』をご覧ください．

異論・反論・駁論・間違い指摘は e メールでお願いします．

→ fj2209@yahoo.co.jp

付録　謎かけ AI 問答

次の三人の科学者の洞察は，時空間の科学の核心を述べたものであるが，これらを統合して 40 字以内の文章に表わせ.

クライン　1862　エルランゲン・プログラム
「変換群で不変な性質を研究するのが，幾何学である.」

ガリレイ
「自然法則は，いずれの慣性系においても同じである.」
1638『新科学対話』相対性原理の着想
「自然という書物は，数学という言葉に対称という文法(補足)で書かれている．」

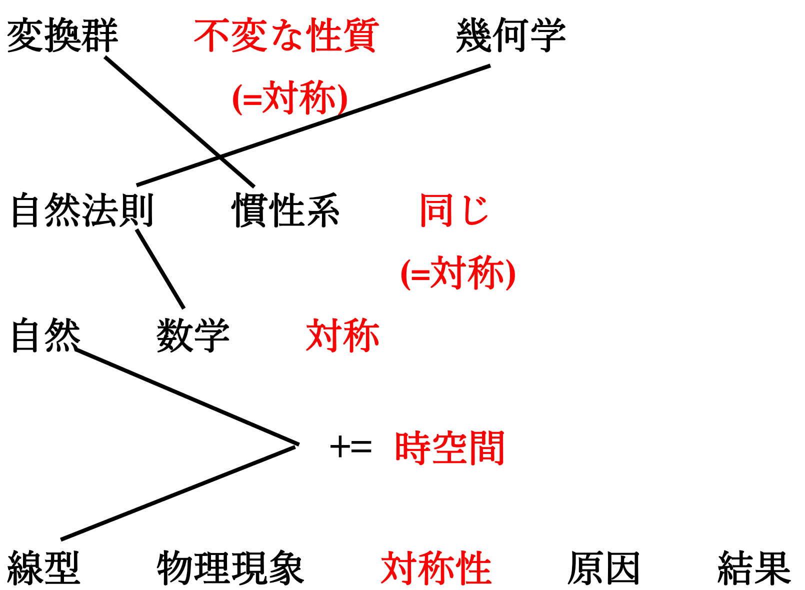
キュリーの原理　1894
「線型の物理現象では，原因の対称性は結果の中に見出される．」

答を得るのに私は十数年かかりましたが，AI に尋ねてみるとわずか数秒で優等生的な答が返ってきました.

Microsoft 社の AI　Copilot の答　　2024.06.11

自然の法則は数学の対称性と変換群によって不変であり、全てに反映される。

キーワードの分析



私の答は，AI の答で数学を時空間に置換えたものと同じです.

時空間の対称性が，自然法則をつくる.