序章　表裏対称平面と相対性

本章は論文「Symmetry Plane Causes Relativity」の翻訳であり，本書の大要である．

概要　古代ギリシャから受け継がれてきたユークリッド幾何学は，その公理的方法が近代科学のお手本となった．ヒルベルトの『幾何学の基礎』は，欠けていた二つの公理(順序・連続)を補い，幾何学として完成の域に達したかにみえたが，平面の究極の性質は何なのか，という疑問が残る．特殊相対論の歴史を振返れば，ローレンツとポアンカレはマイケルソン-モーレーの実験結果を数学的に証明しようと道半ばにあったが，そこにアインシュタインが相対性理論を発表した．全てが決着したようにみえるが，これだけでは十分ではない．なぜ相対性原理がなりたつのかを掘下げてみると，時空間のより深い対称性に行きつく．般若心経の一節の「**空即是色**」は，虚空(こくう)にこそ普遍の理(ことわり)がある，と読める．時空実体説の観点からすると，空虚な空間は，宇宙に潜(ひそ)む秩序を掘出す宝庫である．時空間には多くの幾何学的な形象，例えば直線，平面，球，慣性座標系，加速度座標系などが隠れている．これらには個々の幾何学があり，お互いの調和がある．数学で書かれた自然の書を読むと，宇宙の基本対称性は時空間の平面の表裏対称にあり，そこからユークリッド幾何学の回転変換と，特殊相対論のローレンツ変換および相対性原理が演繹される．

1. まえがき

1.1　数学と物理に対する基本的な疑問点

- 平面幾何学に対して

　平面幾何学の公理は何故平面自身の性質から出発しないのか[1], [2]．平面は2次元の線型空間であり，表裏の区別がない．

- 線型代数に対して

　ユークリッド平面の内積は何故ユークリッド平面の性質から導出されないで，ベクトル空間の形式として定義されるのか．ユークリッド平面は自然の賜物であり，数学の人工物ではない．

▪ 特殊相対性理論に対して

ローレンツ変換の導出に, 時間の一方性の条件が明示的には使われていない. すべての時空間の性質, とりわけ時間の一方性と平面の表裏対称性が理論に含まれるべきである.

1.2「ユークリッド平面は, 平面上の任意の直線を軸線として反転不変である」ことを証明せよ.

証明　【ユークリッド平面上に任意に原点をとる. 直交変換として, 回転変換 $R=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ と鏡映変換 $B=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ がなりたつ. このとき, $B^2=E=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow B=B^{-1}$, $R=BM$, ここに $M=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ である. 鏡映変換 B の表わす表面座標系を x-y, 裏面座標系を x_2-y_2 とする. 裏面座標系の軸線は,

y_2軸　$x_2=\cos\theta\cdot x-\sin\theta\cdot y=0 \Leftrightarrow y=\cot\theta\cdot x=x/\sqrt{3}$, 例として $\theta=\pi/3$.

x_2軸　$y_2=-\sin\theta\cdot x-\cos\theta\cdot y=0 \Leftrightarrow y=-\tan\theta\cdot x=-\sqrt{3}x$.

鏡映変換 B は, 表面点 $\boldsymbol{p}$ を対応する裏面点に $\boldsymbol{q}=B\boldsymbol{p}$ と変換する. 同じく, 表面点 $\boldsymbol{p}$ を表面の鏡映点 $\boldsymbol{q}$ に $\boldsymbol{q}=B\boldsymbol{p}$ と変換する. 鏡映変換 B の固有値, 原点を通る固有直線, 二つの固有直線の張る固有平面を求めれば,

- 固有値は, $\det B=-1$, $\mathrm{trace}\, B=0$ より $\lambda=\pm1$.
- $\lambda=1$ に対する固有直線 $B\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$(不動点方程式)を, **折返し線** f という.

$$\cos\theta\cdot x-\sin\theta\cdot y=x \Leftrightarrow y=\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot x=-\tan\frac{\theta}{2}\cdot x=-x/\sqrt{3}. \tag{1}$$

- $\lambda=-1$ に対する固有直線 $B\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{p}$(反転方程式)を, **等方線** g という.

$$\cos\theta\cdot x-\sin\theta\cdot y=-x \Leftrightarrow y=\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}x=\cot\frac{\theta}{2}\cdot x=\sqrt{3}x.$$

線分$(\boldsymbol{p}-B\boldsymbol{p})$は, 等方線 g に平行であり, その中点は折返し線 f 上にあるので, 固有直線 f,g の張る固有平面は, 折返し線 f を軸に半等方平面である.

変換に B より表面点 $\boldsymbol{p}$ が次のように変換される. $\boldsymbol{p}$(表)→$B\boldsymbol{p}$(表)→$B^2\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$(裏)

変換に B より裏面点 $\boldsymbol{p}$ が次のように変換される. $\boldsymbol{p}$(裏)→$B\boldsymbol{p}$(裏)→$B^2\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$(表)

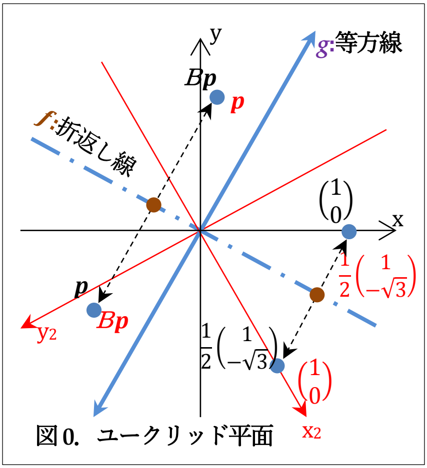


図0. ユークリッド平面

例　$\theta=\pi/3$，$\tan\theta=\sqrt{3}$，$\tan\frac{\theta}{2}=1/\sqrt{3}$

$$B=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

表面側		裏面側
$p=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\rightleftarrows$	$Bp=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$
$\downarrow\uparrow$		$\uparrow\downarrow$
$Bp=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$	$\rightleftarrows$	$p=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=B^2p$

表面点　$p\rightarrow Bp\rightarrow B^2p=p$　裏面点

表面点　$p\leftarrow Bp\leftarrow p$　*裏面点

*表→表 変換は図形変換であり，表⇄裏 変換は座標変換であることに注意.

以上より鏡映変換Bがなりたつとき，表面点pと裏面点pとは対等であり，折返し線 fを鏡映軸線 = 反転軸線として，表裏は対称である．式(1)よりθを任意の実数とすると，折返し線 fは全方位をとるので，ユークリッド平面は，面上の任意の点を通る任意の方向の直線に対して，反転不変である．】

この逆「平面が表裏対称のとき，平面はユークリッド平面である」は部分的になりたつ.

1.3　平面の表裏対称より何が帰結されるか.

平面の表と裏にそれぞれ右手系の斜交座標系を張り，平行移動して両原点を合わせる. 背面座標変換を2×2行列Bで表わすと, 裏返し変換だから$\det B<0$ である. 平面の表裏は区別できないから, 表裏対称方程式　$B=B^{-1}$　を解いて, 自由度2の**斜鏡映変換行列**を得る.

$$B=\begin{pmatrix}-a & -b\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a & -b\\ kb & a\end{pmatrix},\ \det B==-1,\ k=c/b.$$

表裏座標変換Bより表面座標系どうしの座標変換Fを導出する.

$$F=BM=\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ kb & a\end{pmatrix},\ \text{ここに}\ M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \det F=a^2-kb^2=1,\ k=c/b$$

行列Fは右手系どうしの座標変換である．kを固定したとき，変換F，B は共通の不変関数 $\phi(Fp)=\phi(Bp)=\phi(p)=-kx^2+y^2$ をもち, 等長変換群の幾何がなりた

つ(→式(38)). 次のことが分かっている. 係数 kは行列Fの可換係数で, その符号が表裏対称平面の型の違い (全等方型と半等方型) を表わす. k=−1のとき, 行列Fは回転変換, 行列Bは鏡映変換である. また k<0, k=0, k>0 のとき, 行列Fは順に楕円変換, ガリレイ変換, ローレンツ変換である. かくして, 平面の表裏対称は, k=−1のときユークリッド幾何を, k≥0のとき相対性原理をなりたたせる.

2. 準備

用語

斜対称平面は, 一本の折返し線と互いに平行な等方線群をもつ. **斜鏡映変換**Bにより等方線上で任意の点$\boldsymbol{p}$は点$B\boldsymbol{p}$に変換され, それらの中点が折返し線上にある. つまり折返し線を反転軸線として, 斜めに対称の平面である. (→図2)

定義

不変関数　行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 点$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 関数 f($\boldsymbol{p}$)において, f($A\boldsymbol{p}$)=f($\boldsymbol{p}$)がなりたつとき, 関数 f($\boldsymbol{p}$)は行列$A$の不変関数である, 行列は不変関数をもつという.

時空間は, 宇宙から全物質を取去って残る**空虚な**時空で, 時間と空間の統合された 4 次元の存在である.

空間は連続であり, 無限であり, 均質であり, 3 次元であり, 等方的である.

時間は連続であり, 無限であり, 均質であり, 1 次元であり, 一方的であり, 非可逆である.

時空間の**直線**は, 1 次元であり, 線上の任意の点に対して反転不変である.

時空間の**平面**は, 2 次元であり, 面上の任意の 2 点を通る直線に対して反転不変である. これを**時空平面**という.

表裏**区別**平面は, 表と裏が区別できる平面である.

表裏**対称**平面は, 表と裏が区別できない平面である.

時空平面に張る座標軸の軸線の型は, 一つは**空間直線**であり, もう一つは**時間直線**である. 空間直線は等方的であり, 時間直線は一方的である.

時空平面に張る座標系には, **空間×空間型**と**時間×空間型**がある.

空間直線は等方的であるので, **空間×空間型平面**は全等方である. この型の平

面は，慣性系内の3次元空間の2次元部分空間として存在する．
時間直線は一方的であるので，**時間×空間型平面は**半等方である．この型の平面は，一本の直線上を運動する無数の慣性系の，個々の時間と空間よりなる線型時空が，一つの時空平面に共存する．

公理

慣性系公理　時空間には無数の空虚な慣性系が存在する．個々の慣性系は直線上を等速度運動し，固有の4次元時空をもつ．

表裏対称平面公理　時空間の平面は，いずれが表か裏か区別がつかない．

定理

表裏対称平面は，線型空間である．

数学的準備

- 行列$B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のもつ１次不変関数を**不変直線**という．不変関数の定義より

$$\mathrm{f}(\boldsymbol{Bp}) \equiv \mathrm{f}(\boldsymbol{p})=ux+vy \quad \Leftrightarrow \quad u(ax+by)+v(cx+dy)=ux+vy$$

$$\Leftrightarrow \quad [(a-1)u+cv]x+[bu+(d-1)v]y=0.$$

x,yは任意だから，各係数=0．u,vが $u=v=0$ 以外の非自明解をもつ条件は

$$\det\begin{pmatrix} a-1 & c \\ b & d-1 \end{pmatrix}=(a-1)(d-1)-bc=0. \tag{2}$$

行列Bが固有値 $\lambda=1$をもつとき不変直線は，$u=c,\ v=-(a-1)$とおいて

$$\mathrm{f}(\boldsymbol{Bp}) \equiv \mathrm{f}(\boldsymbol{p}) = cx-(a-1)y. \tag{3}$$

- 行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のもつ**２次不変関数を**，不変関数の定義より求める．

$$\phi(\boldsymbol{Ap}) \equiv \phi(\boldsymbol{p})=ux^2+vy^2+wxy \quad \Leftrightarrow \quad \phi(\boldsymbol{Ap})=\phi(ax+by,\ cx+dy)$$

$$=u(ax+by)^2+v(cx+dy)^2+w(ax+by)(cx+dy)=ux^2+vy^2+wxy$$

$$\Leftrightarrow \quad [(a^2-1)u+c^2v+acw]x^2+[b^2u+(d^2-1)v+bdw]y^2$$

$$+[2abu+2cdv+(ad+bc-1)w]xy=0 \tag{4}$$

$x^2,\ y^2,\ xy$は任意であるから，各係数は0であり，u,v,wの連立方程式を得る．

$$\begin{pmatrix} a^2-1 & c^2 & ac \\ b^2 & d^2-1 & bd \\ 2ab & 2cd & ad+bc-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

u,v,wが $u=v=w=0$ 以外の非自明解をもつ条件は，係数行列の行列式＝0.

行列式$=(ad-bc-1)[(ad-bc+1)^2-(a+d)^2]=0.$ (6)

ここで解を $u=-c, v=b, w=a-d$ とおくと次の**恒等式**を得る．

$\phi(A\boldsymbol{p})\equiv\det A\cdot\phi(\boldsymbol{p})$, ここに行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 点 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

関数 $\phi(\boldsymbol{p})=-cx^2+by^2+(a-d)xy.$ (7)

(1) 式(5),(6)より，$\det A=ad-bc=1$のとき，

$\phi(A\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{p})=-cx^2+by^2+(a-d)xy$ (8)

がなりたち，$\phi(\boldsymbol{p})$は行列Aの２次不変関数である．$\phi(\boldsymbol{p})$ はスケール因数rを掛けても，不変関数である．即ち $\Phi(\boldsymbol{p})=r\phi(\boldsymbol{p})$のとき

$\underline{\Phi(A\boldsymbol{p})}=r\phi(A\boldsymbol{p})=r\det A\,\phi(\boldsymbol{p})=r\phi(\boldsymbol{p})=\underline{\Phi(\boldsymbol{p})}.$ (9)

(2) $\det A\neq 1$のとき，関数$\phi(\boldsymbol{p})$を行列Aの**相対不変関数**という．

(3) 式(5)より，もう一つの２次不変関数を得る．行列を$B=\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a \end{pmatrix}$で表現すれば，$\det B=-1$，$\mathrm{tr}B=0$ ⇔ 行列Bの固有値 $\lambda=\pm1$ ⇔ $B=B^{-1}$のとき，

$\phi(B\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{p})=-cx^2+by^2$ または $\phi(B\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{p})=-kx^2+y^2,\ k=c/b$ (10)

を得る．これは式(8)でxy項を消した式と同じである．

以下は，座標平面において係数 k,hを固定するものとする．

▪ **特殊線型変換**Sは，可換係数 k,hをもち，次のように分解できる．

$S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+hb & b \\ kb & m-hb \end{pmatrix}$, ここに $\det S=m^2-\Delta b^2=1$, $\Delta=h^2+k$,

$m=(a+d)/2$, $k=c/b$, $2h=(a-d)/b$, $b\neq0.$ (11)

$S_1=\begin{pmatrix} m_1+hb_1 & b_1 \\ kb_1 & m_1-hb_1 \end{pmatrix}$, $S_2=\begin{pmatrix} m_2+hb_2 & b_2 \\ kb_2 & m_2-hb_2 \end{pmatrix}$とするとき，行列$S_1$, S_2, S_1S_2は共通の可換係数 k,hをもち， $S_1S_2=S_2S_1=$

$$\begin{pmatrix} m_1m_2+\Delta b_1b_2+h(m_1b_2+m_2b_1) & m_1b_2+m_2b_1 \\ k(m_1b_2+m_2b_1) & m_1m_2+\Delta b_1b_2-h(m_1b_2+m_2b_1) \end{pmatrix} \quad (12)$$

がなりたつ．式(8),(9)より，特殊線型行列Sは規格化された不変関数をもつ．

$\phi(S\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{p})=-kx^2+y^2+2hxy.$ (13)

行列Sとその不変関数$\phi(\boldsymbol{p})$は, 判別式Δによって三つの型に分類される．$\Delta=h^2+k<0$，$\Delta>0$，$\Delta=0$ のとき，それらは順に楕円型，双曲型，直線型である．

▪ 次のように**偏角**θを用いて，2×2特殊線型行列Sの極形式による表現を得る．

$S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+hb & b \\ kb & m-hb \end{pmatrix}$, ここに$\det S=m^2-\Delta b^2=1$. θ, k, h を引数として

$\varDelta<0$に対し，$S=S(\theta,k,h)=\begin{pmatrix}\cos\theta+\frac{h}{\sqrt{-\varDelta}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{-\varDelta}}\sin\theta\\ \frac{k}{\sqrt{-\varDelta}}\sin\theta & \cos\theta-\frac{h}{\sqrt{-\varDelta}}\sin\theta\end{pmatrix}$

楕円型，偏角θは楕円角　(14)

$\varDelta>0$に対し，$S=S(\theta,k,h)=\begin{pmatrix}\cosh\theta+\frac{h}{\sqrt{\varDelta}}\sinh\theta & \frac{1}{\sqrt{\varDelta}}\sinh\theta\\ \frac{k}{\sqrt{\varDelta}}\sinh\theta & \cosh\theta-\frac{h}{\sqrt{\varDelta}}\sinh\theta\end{pmatrix}$

双曲型，偏角θは双曲角　(15)

$\varDelta=0$に対し，$S=S(b,h)=\begin{pmatrix}m+hb & b\\ -h^2b & m-hb\end{pmatrix}$, $m=\pm1$.　直線型　(16)

▪ 以上より**2×2非対角正則行列*A***は次の**極形式**で表わされる．

$A=(\det A)^{1/2}S(\theta,k,h)$　または　$A=(\det A)^{1/2}S(b,h)$.　(17)

$\det A<0$ のとき行列Aは裏返し変換を表わすので，式(13)で示す不変関数$\phi(\boldsymbol{p})$の軌道が，共役曲線に飛び移り，偏角θの複素数が出現する．

▪ 可換係数k,hを共有する特殊線型行列S(複数)において，式(14)－(16)より偏角θまたは引数bの**加法定理**を得る．

$S(\theta_1,k,h)S(\theta_2,k,h)=S(\theta_1+\theta_2,k,h)$, $S(\theta,k,h)^{\mathrm{n}}=S(n\theta,k,h)$　(18)

$S(b_1,h)S(b_2,h)=S(b_1+b_2,h)$,　$S(b,h)^{\mathrm{n}}=S(nb,h)$　(19)

▪ ベクトル$\boldsymbol{p}$の*ノルム*$\|\boldsymbol{p}\|$は，行列Sの不変関数$\phi(\boldsymbol{p})$を用いて次に定義される

$\|\boldsymbol{p}\|^2=\phi(S\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{p})=-kx^2+y^2+2hxy$, ノルム　$\|S\boldsymbol{p}\|=\|\boldsymbol{p}\|=\phi(\boldsymbol{p})^{1/2}$　(20)

▪ 二つのベクトル$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$の**内積**は，不変関数$\phi(\boldsymbol{p})$を用いて次に定義される．

$\boldsymbol{p}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{q}=(x_2,y_2)=A\boldsymbol{p}=(\det A)^{1/2}S(\theta,k,h)\boldsymbol{p}$,　(21)

$\|\boldsymbol{p}\|^2=\phi(\boldsymbol{p})=-kx_1^2+y_1^2+2hx_1y_1$,　$\|\boldsymbol{q}\|^2=\phi(\boldsymbol{q})=-kx_2^2+y_2^2+2hx_2y_2$,

$\|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\|^2=\phi(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})=-k(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+2h(x_1+x_2)(y_1+y_2)$

$=\|\boldsymbol{p}\|^2+\|\boldsymbol{q}\|^2+2(\underline{-kx_1x_2+y_1y_2+h(x_1y_2+x_2y_1)})$.

よって内積$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$の定義と**余弦定理**を得る．

$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=-kx_1x_2+y_1y_2+h(x_1y_2+x_2y_1)=\boldsymbol{p}\cdot(\det A)^{1/2}S(\theta,k,h)\boldsymbol{p}$

$=(\|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\|^2-\|\boldsymbol{p}\|^2-\|\boldsymbol{q}\|^2)/2=(\phi(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})-\phi(\boldsymbol{p})-\phi(\boldsymbol{q}))/2$

$=(\det\boldsymbol{A})^{1/2}\phi(\boldsymbol{p})\cos\theta=\|\boldsymbol{p}\|\,\|\boldsymbol{q}\|\cos\theta,$ 　　$\boldsymbol{S}$は楕円型 (22)

$=(\det\boldsymbol{A})^{1/2}\phi(\boldsymbol{p})\cosh\theta=\|\boldsymbol{p}\|\,\|\boldsymbol{q}\|\cosh\theta.$ 　　$\boldsymbol{S}$は双曲型 (23)

▪ 特殊線型行列$\boldsymbol{S}$において $d=a \Leftrightarrow h=0$ のとき, とくに特殊**等対角**変換といい, 行列$\boldsymbol{F}$で表わす．行列$\boldsymbol{F}$の不変関数$\phi(\boldsymbol{p})$，ノルム，内積，極形式を求める．

$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}$，$\det\boldsymbol{F}=a^2-kb^2=1$, $k=c/b$, kは可換係数,

不変関数　$\phi(\boldsymbol{F}\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{p})=-kx^2+y^2.$ (24)

$\|\boldsymbol{p}\|^2=\phi(\boldsymbol{F}\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{p})=-kx^2+y^2$, ノルム　$\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{p}\|=\|\boldsymbol{p}\|=\phi(\boldsymbol{p})^{1/2}$ (25)

内積　$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=-kx_1x_2+y_1y_2.$ (26)

直交　$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=-kx_1x_2+y_1y_2=0 \Leftrightarrow (y_1/x_1)(y_2/x_2)=k$のとき$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$は直交する．

式(14)−(16) で$h=0$と置いて，**特殊等対角変換行列**$\boldsymbol{F}$の極形式を導く．

$k<0$のとき　$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta/\sqrt{-k} \\ -\sqrt{-k}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, θ は楕円角 (27)

この行列$\boldsymbol{F}$は，楕円変換とよばれる．とくに$k=-1$のとき回転変換である．

$k>0$のとき，$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta/\sqrt{k} \\ \sqrt{k}\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$，$\theta$ は双曲角 (28)

この行列$\boldsymbol{F}$は，ローレンツ変換とよばれる．

$k=0$のとき，$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$，$a=\pm1.$ (29)

この行列$\boldsymbol{F}$は，ガリレイ変換とよばれる．

3. 直線の幾何構造

一本の直線に二つの数直線を置き，原点を合わせる．座標 x_1, x_2の関係は

$x_2=rx_1 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=r^{-1}x_2$，ここに$r$は比例定数である．

二つの数直線が対等であるための条件は

$r=r^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad r^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad r=\pm1.$

(1)$r=-1$のとき，二つの数直線は互いに反転の関係にある．この型の直線は**等方的**であり，空間直線がこれに当たる．

(2)$r=1$のとき，二つの数直線は一致の関係にある．この型の直線は**一方的**であり，時間直線がこれに当たる．

(3)$r\neq\pm1$のとき，二つの数直線は**相似**である．

4. 平面の幾何構造

平面の表と裏にそれぞれ右手系の斜交座標系をはり，平行移動して両原点を合わせる．背面座標変換を2×2行列Bで表わすと，Bは裏返し変換だから，$\det B<0$ である．表裏対称方程式は

$B=B^{-1}$　⇔　$B^2=E$，ここに $\det B<0$.　(30)

これを解いて，自由度2の**斜鏡映変換**B を得る．

$B=\pm\begin{pmatrix}-a & -b\\ c & a\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}-a & -b\\ kb & a\end{pmatrix}$, $\det B=-a^2+bc=-1$, $k=c/b$, 固有値 $\lambda=\pm1$
(31)

斜鏡映行列Bは以下の特性をもつ．反転解$-B$は後で扱う．

- 行列Bは固有値 $\lambda=1$をもち，不変直線 $\mathrm{f}(\boldsymbol{p})$をもつ．式(3)で $a\rightarrow-a$ とおいて

  $\mathrm{f}(B\boldsymbol{p})=\mathrm{f}(\boldsymbol{p})=cx+(a+1)y$.　(32)
- 固有値 $\lambda=1$に属する固有直線 ⇔ $B\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$ を**折返し線** $\boldsymbol{f}$ という．

  $\boldsymbol{f}$: $cx+(a-1)y=0$.　(33)
- 固有値 $\lambda=-1$に属する固有直線 ⇔ $B\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{p}$ を**等方線** $\boldsymbol{g}$ という．

  $\boldsymbol{g}$: $cx+(a+1)y=0$.　(34)

式(32)と比べると，不変直線$\mathrm{f}(\boldsymbol{p})$は等方線$\boldsymbol{g}$と平行である．

- 点$\boldsymbol{p}$が不変直線$\mathrm{f}(\boldsymbol{p})$上にあり, 点$\boldsymbol{r}$が折返し線と不変直線$\mathrm{f}(\boldsymbol{p})$の交点であるとき，

折返し線上で　$B\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}$，不変直線上で　$\mathrm{f}(B\boldsymbol{p})=\mathrm{f}(\boldsymbol{p})=\mathrm{f}(\boldsymbol{r})$　がなりたつ．ベクトル$(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})$を等方線$\boldsymbol{g}$上に平行移動して

$B(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})=-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})$　⇔　$B\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}$　⇔　$B\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{r}$　(35)

となる．折返し点(不動点)$\boldsymbol{r}$は，点$\boldsymbol{p}$と点$B\boldsymbol{p}$の中点にあるので，不変直線$\mathrm{f}(\boldsymbol{p})$は点$\boldsymbol{r}$を中心に反転対称で等方的である．折返し線$\boldsymbol{f}$と等方線$\boldsymbol{g}$は，両固有ベクトルの内積が式(26)より $\frac{-c}{a-1}\,\frac{-c}{a+1}=\frac{c^2}{a^2-1}=\frac{c^2}{bc}=\frac{c}{b}=k$ であるので，直交して共役であるが，一般に見た目は直角ではない．固有直線$\boldsymbol{f}$と$\boldsymbol{g}$のつくる固有平面を**斜対称平面**といい，これは**半等方平面**である．図1は　$B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -4 & 5\end{pmatrix}$, $k=1$ の場合を示す．

▪ 他方$B\neq B^{-1}$($h\neq 0$) のとき，平面は表裏区別平面であり，不変関数 $\phi(Sp)=\phi(p)=-kx^2+y^2+2hxy$ の上に可換群 & 等長群Sの幾何がなりたつ．→§3.2.2

▪ 斜鏡映変換Bから**特殊等対角変換**$F=MB$, $\det F=1$を導く．変換Fは, 裏面座標系x_2-y_2を鏡映変換Mにより反転($x_F=-x_2$)して，表面右手系どうし(x-y系とx_F-y_F系)の座標変換* F，としたものである．

* 表裏座標変換Bを右手系どうしの変換Fにするためには$F=\pm MB$または$F=\pm BM$は同格であることに留意．$F=\pm MB$の場合は，x_2軸またはy_2軸を反転する．$F=\pm BM$ の場合は，表面x軸またはy軸を折返し線として，x_2-y_2両軸を折返す．

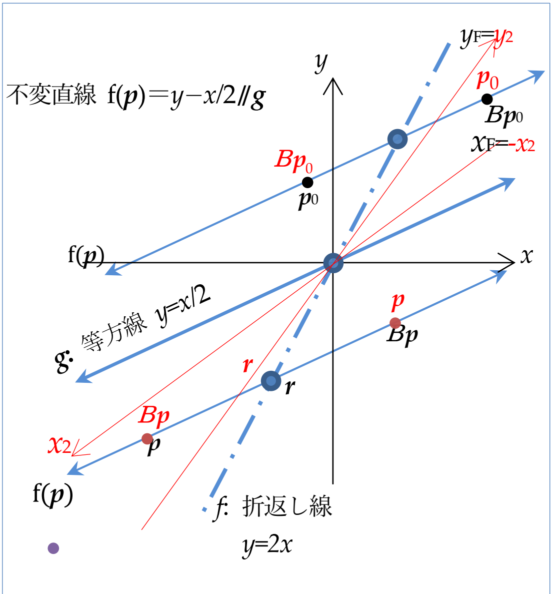


図 1. 斜対称平面

$$F=MB=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a & -b\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ kb & a\end{pmatrix},\ \det F=1,\ k=c/b \tag{36}$$

式(24)より，行列Fは不変関数$\phi(p)=-kx^2+y^2$をもつ．$B=MF$, $\phi(Mp)=\phi(p)$より斜鏡映変換Bは特殊等対角変換Fと共通の不変関数$\phi(p)$をもつ．

$$\phi(Bp)=\phi(M(Fp))=\phi(Fp)=\phi(p)=-kx^2+y^2,\quad k=c/b. \tag{37}$$

係数kを固定したとき，行列F, Bは，自由度 1 をもち，行列FとBの任意の結合演算は，共通の不変関数$\phi(p)$を軌道として閉じている．

$$\phi(BF^2\cdots B^{-1}F^{-1}p)=\phi(F^2\cdots B^{-1}F^{-1}p)=\phi(F\cdots B^{-1}F^{-1}p)$$
$$=\phi(B^{-1}F^{-1}p)=\phi(BF^{-1}p)=\phi(F^{-1}p)=\phi(p)=\phi(Ep)=-kx^2+y^2. \tag{38}$$

かくして表裏対称平面になりたつ斜鏡映変換Bと特殊等対角変換Fおよびそれらの任意の積結合は，２次不変関数$\phi(p)=-kx^2+y^2$を軌道とする**等長変換群****を つくり，等長変換の幾何をつくる．

$$\|Bp\|^2=\|Fp\|^2=\|p\|^2=\phi(Bp)=\phi(Fp)=\phi(p)=-kx^2+y^2. \tag{39}$$

**等長変換とは，変換に対しノルムが変わらない変換である．

▪ 斜鏡映変換(背面座標変換) Bは，表面の点pを対応する裏面の点qに変換する

$$q_1=Bp_1,\quad q_2=Bp_2. \tag{40}$$

また表面において図形変換行列Xが点p_1をp_2に変換する．裏面においても同様に

$$p_2=Xp_1,\ \det X>0,\ q_2=Yq_1,\ \det Y>0 \tag{41}$$

これらの4つの方程式から，次を得る．

$$q_2=Yq_1=\underline{YB}p_1=Bp_2=\underline{BX}p_1. \tag{42}$$

点p_1は任意であり$B=B^{-1}$だから，次を得る．

$$YB=BX \Leftrightarrow Y=BXB \Leftrightarrow BY=XB,\quad \det Y=\det X>0,\quad \mathrm{trace}\,Y=\mathrm{trace}\,X. \tag{43}$$

よって行列XとYは相似てある．式(43)に$B=M$と$B=MF$を代入して

$$YM=MX,\qquad \underline{YM}F=MFX=\underline{MX}F. \tag{44}$$

を得る．第2辺と第３辺を比べて，$FX=XF$，同様に$FY=YF$である．右手系どうしの座標変換Fと図形変換X, Yは可換で同じ可換係数 k をもつから，行列X, Yは共通の相対不変関数$\phi(p)$をもつ．式(7)，(24)より

$$\phi(Xp)=\det X\phi(p)=\phi(Yp)=\det Y\phi(p),\ \phi(Fp)=\phi(p)=-kx^2+y^2 \tag{45}$$

よって変換F，X，Yおよびそれらの任意の積は，可換群をつくる．さらに変換B，F，X，Yおよびそれらの任意の積は，表裏両面において共通の不変関数$\phi(p)=-kx^2+y^2$　を軌道とする変換群の幾何をつくる．(→§4.3.3)

▪ 不変関数$\phi(p)$の係数kの符号により，折返し線fと等方線gからなる斜対称平面の存在領域が定まり，なりたつ平面と幾何の型が決まる．

(1) $k<0$のとき，変換Fは楕円型である．式(27)より変換B（$=MF$）は

$$B=\begin{pmatrix}-a & -b\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta/\sqrt{-k}\\ -\sqrt{-k}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\ b=\frac{1}{\sqrt{-k}}\sin\theta,\ c=kb \tag{46}$$

式(33)から，折返し線fを得る．

$$f: y=\frac{-c}{a-1}x=\sqrt{-k}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}\,x=-\sqrt{-k}\cot\frac{\theta}{2}\cdot x=ux \tag{47}$$

式(34)から，等方線gを得る．

$$g: y=\frac{-c}{a+1}x=\sqrt{-k}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\,x=\sqrt{-k}\tan\frac{\theta}{2}\cdot x=vx.$$

$$\text{直線}f,g\text{の存在方向：}-\infty<u<\infty,\quad -\infty<v<\infty. \tag{48}$$

折返し線fと等方線gは全方向に存在する．このことは反転解$-B$のときも同

様である．従って$k<0$のとき表裏対称平面上の任意の１点の周りに斜対称平面が全等方的に存在するので，この平面は空間×空間型である．これを楕円型平面といい，楕円型の平面幾何がなりたつ．とくに $k=-1$のとき，ユークリッド平面にユークリッド幾何がなりたつ．(→§5.3)

(2) $k>0$のとき，変換Fは双曲型である．式(28)より変換B（$=MF$）は

$$B=\begin{pmatrix}-a & -b\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cosh\theta & -\sinh\theta/\sqrt{k}\\ \sqrt{k}\sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix},\ b=\frac{1}{\sqrt{k}}\sinh\theta,\ c=kb \tag{49}$$

式(34)から，折返し線fを得る．

$$f: y=\frac{-c}{a-1}x=-\sqrt{k}\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta-1}x=-\sqrt{k}\coth\frac{\theta}{2}\cdot x=ux.$$

式(35)から，等方線gを得る．

$$g: y=\frac{-c}{a+1}x=-\sqrt{k}\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta+1}x=-\sqrt{k}\tanh\frac{\theta}{2}\cdot x=vx. \tag{50}$$

漸近線が存在し座標平面を4象限に分ける．$y=\pm\sqrt{k}x,\quad \theta\to\pm\infty$ (51)

折返し線fの存在方向 ：$-\infty<u<-\sqrt{k}$，$\sqrt{k}<u<\infty$　　上下象限 (52)

等方線gの存在方向：$-\sqrt{k}<v<\sqrt{k}$　　左右象限 (53)

裏面x_2-y_2 軸は，y_2 axis: $x_2=-ax-by=0 \Leftrightarrow y=-\sqrt{k}\coth\theta\cdot x,$

x_2 axis: $y_2=cx+ay=0 \Leftrightarrow y=-\sqrt{k}\tanh\theta\cdot x.$ (54)

折返し線fは上下象限に存在し，等方線gは左右象限に存在する．反転解$-B$のとき，fとgおよびそれらの存在象限は入替わる．従って$k>0$のとき，表裏対称平面上の任意の１点を原点とした斜対称平面の折返し線fの向きが，式(51) の示す両漸近線の仕切る向い合った二つの四半象限内に偏在するので，この平面は半等方的で時間×空間型である．f, y, y_2軸には時間軸が，g, x, x_2軸には空間軸が適する．これをミンコフスキー平面といい，双曲型の平面幾何(ミンコフスキー平面幾何)がなりたつ．

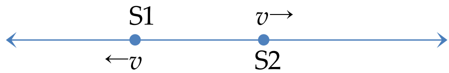
自然の時空平面は，物理法則と実験により $k>0$ である．このことは後に論じる．

5. 予期される結論

5.1　相対性原理の概念的理解

ポアンカレの予想によれば [3], [4]，よくできた理論は相対性原理を厳密にし

かも一挙に証明する．



いま一直線上をお互いに速度 v m/secで遠ざかる二つの慣性系S1, S2を考える．図2のミンコフスキー平面において，S1の座標軸 x_1-t_1 は表面に，S2の座標軸 x_2-t_2 は裏面にある．両座標軸の原点を一致させる．時間×空間型の表裏対称平面になりたつは特殊等対角変換Fは$k>0$であり，式(28)より，ローレンツ変換L (x_L-t_L座標，$y=t$ とする)である．

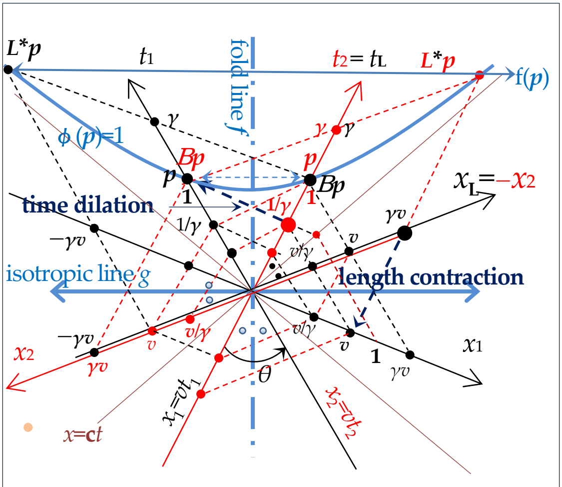


図 2. Symmetry Plane Causes Relativity

$$x_L=ax_1+bt_1,\ t_L=kbx_1+at_1.$$

第1式より，aは無単位係数であり，bは速度係数である．表面において，S2の動きは $x_1=vt_1$ と表わされるので, t_L 軸は $x_L=0 \Leftrightarrow x_1=vt_1$ および $v=-b/a$ となる．第2式において，k は速度の2乗の逆数であり，慣習上 $k=1/c^2>0$ とおく．cは速度定数である．det$L$=1 だから， $a=1\big/\sqrt{1-v^2/c^2}=\gamma\geqq 1$. を得る．従って，ローレンツ変換$L$ とその斜鏡映変換B は,

$$L=\gamma\begin{pmatrix}1 & -v\\ -v/c^2 & 1\end{pmatrix}=MB,\ \det L=1,\ M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=LB,\ \gamma=1\big/\sqrt{1-v^2/c^2},$$

$$B=\gamma\begin{pmatrix}-1 & v\\ -v/c^2 & 1\end{pmatrix}=ML,\ \det B=-1,\ \begin{pmatrix}x_L\\ t_L\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}x_1\\ t_1\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\gamma v\\ \gamma\end{pmatrix},$$

$$t_2\text{-axis: } x_2=\gamma(-x_1+vt_1)=0,\ x_2\text{-axis: } t_2=\gamma(-vx_1/c^2+t_1)=0,$$

$$\phi(BLp)=\phi(Lp)=\phi(L^*p)=\phi(Bp)=\phi(p)$$

$$=\phi\begin{pmatrix}x_1\\ t_1\end{pmatrix}=\phi\begin{pmatrix}x_2\\ t_2\end{pmatrix}=\phi\begin{pmatrix}x_L\\ t_L\end{pmatrix}=-kx^2+t^2,\ k=1\big/c^2>0,$$

$$\text{S1}\to\text{S2}: x_1=vt_1,\ \text{S2}\to\text{S1}: x_2=vt_2,\ x_L=-vt_L,$$

$$x_1\text{-axis} /\!/ \boldsymbol{Bp}—\boldsymbol{L^*p},\ \text{isotropic line } g /\!/ \boldsymbol{p}—\boldsymbol{Bp}.$$

*$\boldsymbol{Bp}$ or $\boldsymbol{L^*p}$ は図形変換を表わし，$\boldsymbol{Bp}$ or $\boldsymbol{Lp}$ は座標変換を表わすことに留意.

変換Bの折返し線f と等方線g は, 直角に描いてある. 図1と同じ$B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -4 & 5\end{pmatrix}$を仮定し，**c**=1, v=4/5, k=1, γ=5/3 である．式(54)より，$y=t_1$ と $y_2=t_2$ とすると，両軸の双曲角は $\theta=-1.0986$ である．物理的な対称性は $x_1=vt_1$ と $x_2=vt_2$ が, 座標軸 x_2-t_2 と x_1-t_1. の傾きにより表現される．S1からみてS2の時空間の縮小($v\to v/\gamma$ m と $1\to 1/\gamma$ sec)が，また反対にS2からみてS1の時空間の縮小が，相互にみられる．縮小は t_1 と t_2 軸の，また x_1 と x_2. 軸の射影により引起こされる．$L^{-1}\begin{pmatrix}\gamma v\\ -\gamma v^2/c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\ 0\end{pmatrix}$を 動く棒の length contraction，$L^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 1/\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\ 1\end{pmatrix}$をS2の$x_2$ 原点に固定した時計からみたS1の time dilation という.

点 $\boldsymbol{p}$ または軸 x_L-t_L が表面にあれば，点 $\boldsymbol{Bp}$ または軸 x_2-t_2 は裏面に隠れている．慣性系 S1 から S2 をみた姿と，S2 から S1 をみた姿は同じであるから，図2.で表からみた図と，裏からみた図は同じである．折返し線 f，等方線 g，不変直線 f($\boldsymbol{Bp}$)=f($\boldsymbol{p}$)，不変関数$\phi(\boldsymbol{p})=-kx^2+y^2$ は表裏同形である．表面点は $\boldsymbol{p}$ (表)→$\boldsymbol{Bp}$ (表)→$\boldsymbol{B^2p}=\boldsymbol{p}$ (裏)の対応があり, 裏面点$\boldsymbol{p}$ も同様な対応があるので, 表面点$\boldsymbol{p}$は裏面点$\boldsymbol{p}$と等価である．同様に表面で変換 $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{L^*p}$ は，裏面で変換 $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{L^*p}$ と同等である．かくして，表面の世界と裏面の世界は，空間×時間型平面の対称性により，完全に同等である．これは直ちに相対性原理を意味する．即ち時間と空間のベクトル$\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}$ からなる自然の基本法則は，斜鏡映変換B不変であり，従ってローレンツ変換L不変である．これは$L=MB$ であり，基本法則は空間反転不変であることによる．特殊相対性理論の相対性原理とローレンツ変換は，時空平面の表裏対称性から演繹される．普遍限界速度**c**については時空平面の構造として式(51)に暗示されるが，§5.1の議論を参照されたい.

5.2 時間の矢の問題の一つの答

物理現象の基本法則が時間に関して反転対称性をもつにもかかわらず，物理現象が時間の一定の方向にしか進行しないのはなぜか？ これは､物理学では長

い間未解決であった「時間の矢」の問題である．物理現象は，単位目盛間隔が規則的に並んだ線形時空間で発生するが，その±方向は決定されない．時間は過去から未来へと進むが，時間の向きは正または負のいずれでもよい．同様に，東向きの直線の向きは正または負とすることができる．

この問題を解決するため，同一速度で運動する二つの慣性系を表わすミンコフスキー平面を考えることが必要である．振り子の動作を観察するとき，表側で時間が正の向きに進み，裏側で時間が負の向きに進むとしたら，両者が平面のどちら側にいるのか，区別がつくことになるが，これはあり得ない．自然は平面のいずれ側にあるのか区別がつかないようにできている．時空平面の表裏対称性が，時間の矢の問題の核心である．

5.3　ユークリッド平面の例

k=−1のとき，不変関数は $\phi(\boldsymbol{F}\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{B}\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{p})=x^2+y^2$ であり，x^2 と y^2 の係数が同じだから，表裏対称平面はユークリッド平面である．変換$\boldsymbol{F}$は回転変換でありり，変換$\boldsymbol{B}$は鏡映変換である．この場合折返し線 fと等方線 gは直角に直交する．式(27)より，回転角が$\theta=-\pi/3$のとき，変換$\boldsymbol{F}$と$\boldsymbol{B}$は次となる．

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{M}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{ここに}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ c=-b=-\sin\theta=\sqrt{3}/2,\ a=\cos\theta=1/2. \tag{55}$$

この場合，裏面x_2-y_2座標を$\boldsymbol{M}$によりx軸で折返して表面x_F-y_F座標としている．

折返し線 f ：$f: y=\frac{x}{\sqrt{3}}$,　　等方線　$g:\ y=-\sqrt{3}x$..　　(56)

背面x_2軸 ：$y=\frac{c}{a}x=-\tan\theta\cdot x=\sqrt{3}x$,　　y_2軸：$y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$.　　(57)

右手系座標変換$\boldsymbol{F}$は次の座標軸をもつ．

x_F 軸: $y=-\sqrt{3}x$,　　y_F 軸 ：$y=x/\sqrt{3}$.　　(58)

行列$\boldsymbol{X}$を表面における図形変換とする．任意の点$\boldsymbol{p}$を背面座標変換$\boldsymbol{B}$, 表面座標変換$\boldsymbol{F}$, 表面図形変換$\boldsymbol{X}$で順不同に変換して元の点に戻すとする．$\boldsymbol{X}=(\det\boldsymbol{X})^{1/2}\boldsymbol{S}$, $\det\boldsymbol{S}=1$ ($\boldsymbol{F},\boldsymbol{X},\boldsymbol{S}$は可換) であり，不変関数は　$\phi(\boldsymbol{F}\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{B}\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p})=\phi(\boldsymbol{p})=x^2+y^2$　である．図4では理解しやすいよう点$\boldsymbol{p}$の変換について，表面座標変換$\boldsymbol{F}$を図形変換$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}^{-1}(\theta=\pi/3)$として，合成変換の閉じた周回を表示する．

図4で裏面の点 Bp は表面点 p の裏に隠れている． $0<\det X<1$ とすると

- p(表)→Ap(表)→BAp(裏)→$ABAp = Bp$(裏)→$BABAp = p$(表)
- p(表)→Ap(表)→BAp(表)→$ABAp = Bp$(表)→$BABAp = p$(表)

二つの周回は同等のことを表わしている．変換 S， X も同様に

- p(表)→ Sp(表)→BSp(裏)→$SBSp = Bp$(裏)→$BSBSp = p$(表)
- p(表)→$Xp = (\det X)^{1/2}\, Sp$(表)→$(\det X)^{1/2} BSp = B\,Xp$(裏)

→$SBSp = Bp$(裏)→$BSBSp = p$(表)　　　(68)

表面の実線 (p→Ap or p→Xp) は裏面の破線 (Bp→$B\,Ap$ or Bp→BXp) と等価の変換である．

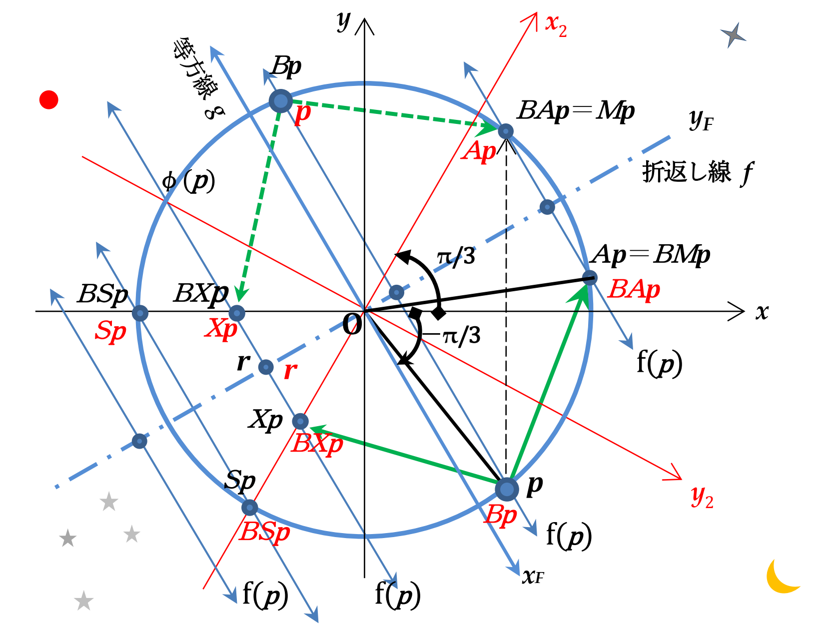


図 3. ユークリッド平面における変換の表裏対称

折返し線 f， 等方線 g， 不変直線群f(p)， ２次不変関数 $\phi(p)$ は表裏の座標系からみて，同形である．ユークリッド平面の表裏両側からみると，変換が表裏対称になされる自然の巧妙な唐繰（からく）りをみることができる．

参考文献

[1] 林鶴一『初等幾何学の体裁』哲学 296号 1911

→ http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Other/kikagaku-teisai.pdf

[2] 戸坂潤『幾何学と空間』 思想 57号 1926

→ https://www.aozora.gr.jp/cards/000281/files/43263_35546.html

[3] Henri Poincaré,"Electricité et optique. Lalumiére et les théories élecrtodynamiques. Leçon professée a la Sorbonne en 1889",Paris,1901;
A well-developed theory should prove this [relativity] **principle strictly and all at once,** ・・・

[4] Henri Poincaré,"La hyposesis Science ",1902 and
"La Valuer de la Science",1905 Chap3.1 Concept of relative space
It is indistinguishable when one world changes the coordinate axis or the scale of length into another world. ・・・・・・
ポアンカレはM-M実験の結果を説明する幾何学的な理論を予期していた.

A.Einstein "At a glance, non-ridicurous ideas are unlikely."

A.S.Wightman "A greate physical theory is not mature until it has been put in a precise mathematical form, and it is often only such a mature form that it admits clear answers to conceptual problems" 1976

付録１　光との苦闘の歴史　(光速測定と粒子説対波動説)

光学ほど度々建て替えを余儀なくされた科学分野はない．光の速度が余りにも速いため，また複雑な現象を示すためだろう．未だに概念として明快ではない．

　中世までは光速は瞬達と信じられてきたが, それに疑問をもつ人が出てきた．レーマーが木星の衛星の観測で，季節により蝕の開始が微妙にずれることを発見し，光速が有限であることを論証した．

1607 ガリレイ 遠く離れた２人が手提げランプの信号を用いて光速測定し不成功

1620 スネル 屈折の法則を発見，プトレマイオスの屈折の法則を訂正

1668 フック 光はエーテルの振動説（エーテル説の草分け）

1675 レーマー 木星の衛星の蝕の観測 c=2.14x10^{8}m/s

1678 ホイヘンス 波動説提唱　ホイヘンスの原理　1690『光についての論考』

1704 ニュートン『光学』波動説に消極的，粒子説が後に権威化

1728 ブラッドリー 地球の公転による恒星の光行差より計算 c=2.99x10^{8}m/s

1801 ヤング 二重スリットによる光の干渉実験で波動説

1818 フレネル 部分随伴説，横波説

1849 フィゾー 回転歯車によるストロボ装置で測定 c=3.13x10^{8}m/s

1850 フーコー 水中の光速が遅くなることを実証，波動説に軍配

1851 フィゾー 流体中の光速測定実験→フレネルの随伴説を支持

1856 ウェーバーとコールラウシュ 電気力と磁気力の比の測定値が光速なるを発見

1862 フーコー 実験室内の高速回転鏡装置で測定 c=2.980x10^{8}m/s

1865 マクスウェル 電磁気方程式より電磁波を予言，波速の理論値が光速と一致

1878 マイケルソン 回転鏡装置で測定 c=3.0015x10^{8}m/s

1887 マイケルソン-モーリーの実験

1888 ヘルツ 電磁波を実証

1900 プランク 光エネルギーの量子仮説で黒体放射を説明

1905 アインシュタイン 光量子仮説で光電効果を説明

1947~ 多数の研究所 電波技術による測定 c=2.99792x10^{8}m/s

1969~ 多数の研究所 レーザー光による測定 c=2.99792x10^{8}m/s

1983 宇宙の普遍定数として光速を定義 **c=299792458m/s**